
Geometria

5. harjoitustehtävät

Veltolla harpilla voidaan piirtää vain sellaisia ympyröitä, joista tunnetaan keskipiste ja vähintään yksi kehän piste. Veltolla harpilla voidaan ratkaista esim. harjoitustehtävä 3.3, joka on Eukleideen Alkeiden Propositio 1. Ratkaise käyttämällä ainoastaan sitä, velttoa harppia ja viivoitinta seuraavat Alkeiden Propositiot 2 ja 3.

1. Annetaan piste A ja jana BC . Konstruoi piste D siten, että janat AD ja BC ovat yhtä pitkiä.
2. Annetaan janat AB ja CD . Oletetaan, että AB on pitempi kuin CD . Konstruoi piste $E \in AB$ siten, että janat AE ja CD ovat yhtä pitkiä.
3. Olkoon $\alpha = P + [u]$ suora, S siirto, jolle $S(P)$ on origo ja $\alpha' = [u]$. Osoita, että $\alpha' = S(\alpha)$ ja

$$\Omega_\alpha = S^{-1} \circ \Omega_{\alpha'} \circ S.$$

Olkoot $\alpha = [u]$, $\beta = [v]$, $u = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ja $v = (\cos \psi, \sin \psi)$. Osoita, että

$$4. \Omega_\beta(X) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$5. \Omega_\alpha \Omega_\beta(X) = \begin{pmatrix} \cos 2(\varphi - \psi) & -\sin 2(\varphi - \psi) \\ \sin 2(\varphi - \psi) & \cos 2(\varphi - \psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$6. \Omega_\alpha \Omega_\beta(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = (r \cos[\vartheta + 2(\varphi - \psi)], r \sin[\vartheta + 2(\varphi - \psi)]).$$