

---

## Geometria

### 6. harjoitustehtävät

---

1. Määritellään isometria  $T: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  yhtälöllä  $T(x_1, x_2) = (x_2 + 2, x_1 + 2)$ . Osoita, että  $T$  on liukupeilaus. Mikä on  $T$ :n akseli  $\ell$ ? Esitä  $T$  muodossa  $T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\ell$ , missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat suoran  $\ell$  normaaleja.

2. Olkoot  $\ell$  ja  $m$  kaksi eri suoraa. Osoita, että  $\Omega_\ell \circ \Omega_m = \Omega_m \circ \Omega_\ell$ , jos ja vain jos  $\ell \perp m$ .

3. Olkoot  $\alpha$  ja  $\beta$  kaksi suoran  $\ell$  normaalia. Osoita, että

$$\Omega_\ell \circ \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\ell,$$

ts. että siirto pitkin suoraa  $\ell$  ja peilaus suorassa  $\ell$  kommutoitavat.

4. Olkoot  $S$  ja  $T$  liukupeilauksia, joiden akselit ovat yhdensuuntaisia. Millainen kuvaus on  $T \circ S$ ?

5. Olkoot  $P, Q, R$  ja  $S$  neljä sellaista pistettä, että mitkään kolme niistä ei ole kollineaarista. Olkoot  $A, B, C$  ja  $D$  janojen  $PQ, QR, RS$  ja  $SP$  keskipisteet. Osoita, että  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  tai  $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$ , ja että  $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  tai  $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{BC}$ . Milloin kaksi mainituista suorista voi yhtyä?

6. Olkoot  $S$  ja  $T$  isometrioita sekä  $S_0 = T \circ S \circ T^{-1}$ .

a) Osoita, että piste  $P$  on  $S$ :n kiintopiste, jos ja vain jos  $T(P)$  on  $S_0$ :n kiintopiste.

b) Osoita, että  $\ell$  on  $S$ :n kiintosuora, jos ja vain jos  $T(\ell)$  on  $S_0$ :n kiintosuora.

7. Olkoon  $\Omega_\ell$  peilaus. Osoita, että on olemassa siirto tai kierto  $T$  siten, että  $T \circ \Omega_\ell \circ T^{-1}$  on peilaus  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$ .

8. Osoita tehtävien 6 ja 7 avulla: Peilauksella  $\Omega_\ell$  on kiintopisteinä kaikki suoran  $\ell$  pisteet ja vain nämä. Peilauksella  $\Omega_\ell$  on kiintosuorina suoran  $\ell$  lisäksi kaikki  $\ell$ :n normaalit ja vain nämä.