Metriset avaruudet

Demo 1, kevät 2003

1. Laske $\mathbb{R}^3$:n pisteiden $a = (1,0,2)$ ja $b = (-1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ etäisyys metriikoissa d_2, d_1 ja d_∞.

2. Ota vielä peliin piste $c = (0,0,-1)$. Totea, että kolmioepäyhtälö toteutuu kaikille yllä mainituille metriikoille: $d_2(a,c) \leq d_2(a,b) + d_2(b,c)$ jne.

3. Piirrä tasossa $\mathbb{R}^2$ pallot $B_{d_1}\big((0,0),1\big)$, $B_{d_1}\big((2,4),3\big)$ ja $B_{d_1}\big((2,4),\frac{1}{10}\big)$.

4. Laske avaruudessa $C(-2,2)$ alkioiden f ja g etäisyydet metriikoissa d_∞ ja d_1, kun

   a) $f(t) = -1 + e^{-t}$, $g(t) = 100 + 3t^3$,

   b) $f(t) = t^2 - 1$, $g(t) = 3t^3$.

5. Osoita, että lauseke
$$d_\infty(f,g) := \max_{t \in]-2,2[} |f(t) - g(t)|$$
ei ole hyvin määritelty metriikka joukossa X, jonka muodostavat avoimella välillä $]-2,2[$ jatkuvat funktiot. Vihje: Tarkastele esimerkiksi funktioita $f(t) = \frac{1}{2-t}$ ja $g(t) = 0$.