

---

## Metriset avaruudet

Demo 3, kevät 2003

---

Tehtävissä 1 ja 2 tarkastellaan metristä avaruutta  $X := \mathbb{R}$ , varustettuna tavallisella metriikallaan. Kysymys: ovatko annetut joukot rajoitettuja, ja jos ovat, laske niiden halkaisija.

1. a)  $A := \{2, 4, 6, 8, \dots\}$   
b)  $A := \{\sin 2x \mid x \in \mathbb{R}\}$ .
2. a)  $B := \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  
b)  $B := \{3^{-n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 5\}$ .
3. Olkoon a)  $X := (\mathbb{R}^2, d_\infty)$  ja b)  $X := (\mathbb{R}^2, d_1)$ . Laske kummassakin tapauksessa  $X$ :n osajoukon

$$A := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

halkaisija. Vihje: poimi sopivat pisteparit koordinaattiakseleilta tai suorilta  $y = x$ .

4. Olkoon  $X := (\mathbb{R}^2, d_2)$  eli taso varustettuna tavanomaisella Euklidisella metriikallaan. Olkoon  $A$  osajoukko, jota rajoittavat koordinaattiakselit, suora  $x = 2$ , sekä paraabelin  $y = x^2 + 1$  kuvaaja. Tarkemmin sanoen

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2 + 1\}.$$

(Piirrä kuva!) Mitkä  $A$ :n pisteet ovat sisäpisteitä?

5. Osoita, että tasossa  $\mathbb{R}^2$  pätee palloille aina

$$B_{d_2}(a, r) \subset B_{d_\infty}(a, r) \subset B_{d_2}(a, 2r)$$

olivatpa keskipiste  $a$  ja säde  $r$  mitä tahansa. (Tästä on se seuraus, että tasossa avoimet joukot ovat samat metriikoille  $d_2$  ja  $d_\infty$ ! Sama pätee myös metriikalle  $d_1$ . Edelleen, sama pätee avaruuksissa  $\mathbb{R}^n$ , muttei enää  $\infty$ -ulotteisessa avaruudessa  $C(0, 1)$ .)