

---

## Metriset avaruudet

Demo 4, kevät 2003

---

1. Osoita, että

a)  $(\frac{3}{2}, 3, 0)$ ,

b)  $(1 + 10^{-6}, 3, 0)$

on  $\mathbb{R}^3$ :n joukon  $]1, 2[ \times ]2, 4[ \times ]-1, 1[$  sisäpiste.

2. Olkoon  $A$  metrisen avaruuden  $(X, d)$  osajoukko. Osoita, että joukko  $B$ ,

$$B := \{x \in X \mid \text{on olemassa } a \in A \text{ siten, että } d(x, a) < 1\}$$

a) sisältää joukon  $A$ ,

b) on avoin  $X$ :n osajoukko. (Vihje:  $B$  on yhdiste avoimista palloista.)

3. Ovatko seuraavat  $\mathbb{R}^2$ :n osajoukot avoimia tai suljettuja:

a)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,

b)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$ ,

c)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ .

4. Olkoon  $(X, d) := \mathbb{R}^4$  ja  $(x_n)_{n=1}^\infty$  jono, jonka  $n$ :s alkio on

$$x_n = \left( \frac{1}{1+n}, (-1)^n, e^{-n}, 1 \right).$$

Suppeneeko kyseinen jono  $X$ :ssä?

5. Suppeneeko  $C(-5, 5)$ :n jono  $(f_n)_{n=1}^\infty$  metriikassa  $d_\infty$ , kun

a)  $f_n(t) = \frac{1}{20 + (t/n)}$ ,

b)  $f_n(t) = \left(\frac{t}{5}\right)^n$ ,

c)  $f_n(t) = \left(\frac{t}{10}\right)^n$ ?