
Metriset avaruudet

Demo 5, kevät 2003

1. Osoita, että kuvaus

a) $f(x) = e^{-x^2}$,

b) $f(x) = \frac{1}{10} \frac{x}{1+|x|}$

on kontraktio joukossa \mathbb{R} . (Vihje: a-kohdassa väliarvolause)

2. Onko funktio $f(x) = x^3$ kontraktio joukossa

a) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$,

b) $[-2, 2]$,

c) \mathbb{R} ?

3. Tarkastellaan kuvausta $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{10}(x_1^2, x_1 - x_2)$, missä x_1 ja $x_2 \in \mathbb{R}$.

Osoita, että tämä on kontraktio joukossa A , jonka muodostavat ne tason pisteet $x = (x_1, x_2)$, joille $-1 \leq x_1 \leq 1$ ja $-1 \leq x_2 \leq 1$. Neuvo. Muodosta viileästi harkiten lauseke $d_2(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2))$, missä $x = (x_1, x_2) \in A$ ja $y = (y_1, y_2) \in A$. Yritä arvioida tätä ylhäältä esimerkiksi lausekkeella vakio $\cdot (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$, joka taas on pienempää kuin joku toinen (pieni) vakio $\cdot d_2(x, y)$.

4. ”Ratkaise” yhtälöt

a) $x = \frac{1}{2} + e^{-x^2}$,

b) $\sin x + 10x - 5 = 0$,

missä $x \in \mathbb{R}$; tarkemmin sanoen, osoita, että yhtälöillä on jollain sopivalla suljetulla välillä yksikäsitteinen ratkaisu ja esitä, miten ratkaisua voidaan approksimoida.

5. Tutki yhtälön

$$x = \left(\frac{1}{10}, 0, -\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10}(x_2^2, x_1^2, x_1 - x_3)$$

ratkaisemista \mathbb{R}^3 :ssa; tässä $x = (x_1, x_2, x_3)$. Neuvo. Kiintopistelause esim. aliavaruudessa $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2, 3\}$.