

---

## Metriset avaruudet

Demo 6, kevät 2003

---

1. Onko kuvaus

a)  $(Tf)(t) = f(t^2)$ ,

b)  $(Tf)(t) = \frac{1}{2}f(t^2)$ ,

c)  $(Tf)(t) = \frac{1}{2}f(t)^2 \cos t$ ,

kontraktio avaruudessa  $(C(-1, 1), d_\infty)$ ? Kohdassa c), jos vastaus on negatiivinen, onko  $T$  kontraktio jossain  $C(-1, 1)$ :n aliavaruudessa?

2. Osoita, että operaattori  $T$ ,

$$(Tf)(t) = e^{-t} \int_0^1 f(s) ds$$

on kontraktio avaruudessa  $(C(0, 1), d_1)$ .

3. Tutki operaattorin

a)  $(Sf)(t) := \int_{-5}^5 e^{-100|t|-100|s|} f(s) ds$ ,

b)  $(Rf)(t) := \int_{-5}^5 e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds$

kontraktiivisuutta avaruudessa  $(C(-5, 5), d_\infty)$ . Neuvo. Ota ensin  $t$ -riippuvuus pois integraalimerkin alta. Käytä hyväksi integroinnissa muuttujanvaihdosta saatavaa pientä kerrointa.

4. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + |t - s|} f(s) ds + \sin t + f(t) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (välillä  $[0, 1]$  jatkuva funktio  $f$ ).

5. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) + e^{-t^2} = \int_{-5}^5 e^{-100|t|-100|s|} f(s) ds$$

on yksikäsitteinen, välillä  $[-5, 5]$  jatkuva funktio  $f$ , ratkaisuna. Neuvo. Luennoilla esitetty lause ei sovellu nyt suoraan, mutta voit käyttää tehtävää 3 hyväksesi.