

---

**Metriset avaruudet**Demo 9, kevät 2003

---

1. Olkoon  $X$  avaruuden  $\mathbb{R}^2$  aliavaruus,

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ja  $Y$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruus

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, |y| \leq 2, z \leq 1\}.$$

Tutki pisteitä  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  sekä  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ , missä  $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\tilde{a} = (1, 0)$ ,  $b = (0, 1, 1)$ ,  $\tilde{b} = (0, 2, 2)$ .

Kuuluvatko ne seuraaviin joukkoihin:

- $X \times Y$ ,
  - $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3) \setminus (X \times Y)$ ,
  - $X \times (\mathbb{R}^3 \setminus Y)$ .
2. Kuuluvatko tehtävän 1 pisteet tuloavaruuden  $X \times Y$   $(\bar{0}, \bar{0})$ -keskiseen, 2-säteiseen palloon a)  $d_1$ -metriikassa, b)  $d_\infty$ -metriikassa. (Sekä  $X$  että  $Y$  on varustettu itse euklidisella metriikalla!)
3. a) Peitä väli  $] -2, 0[$  muutamalla avoimella  $\frac{1}{3}$ -pituisella välillä (eli etsi  $n$  kpl avoimia välejä  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , joiden pituus on  $\frac{1}{3}$ , ja joille

$$\bigcup_{j=1}^n I_j \supset ] -2, 0[$$

- b) Samoin, peitä  $\mathbb{R}^3$ :n ellipsoidi

$$\{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$$

äärellisellä määrällä  $d_\infty$ -metriikan palloja  $B_{d_\infty}(a, 1)$ , missä  $a \in \mathbb{R}^3$ .

4. Onko avaruuden  $\mathbb{R}^2$  jonolla  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , missä määritellään

$$x_1 = (1, 0), \quad x_n := -x_{n-1} + (2^{-n}, 0),$$

kun  $n > 1$ , suppenevaa osajonoa?

5. Onko avaruuden  $\mathbb{R}^3$  jonolla  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , missä  $x_n = (0, \frac{1}{n}, n)$ , suppenevaa osajonoa?