

---

**Metriset avaruudet**Demo 10, kevät 2003

---

1.-3. Mitkä seuraavista metrisistä avaruuksista ovat kompakteja, prekompakteja, rajoitettuja, täydellisiä? Kohdat a)–e) ovat  $\mathbb{R}$ :n aliavaruuksia, f)–l)  $\mathbb{R}^2$ :n aliavaruuksia ja m)–n)  $C(0, 2)$ :n aliavaruuksia.

a)  $]10, 100[$ ,      b)  $[10, \infty[$ ,

c)  $[10, 100]$ ,      d)  $[10, 100] \cup [200, 300]$ ,

e)  $[10, 100] \cup ]200, 300[$ ,      f)  $[1, 2] \times [0, \infty[$ ,

g)  $[1, 2] \times ]0, 10[$ ,      h)  $]1, 2[ \times ]0, 10[$ ,

i)  $[1, 2] \times [0, 10]$ ,      j)  $[1, 2] \times [0, 10] \cup ]1, 2[ \times [0, 100]$ ,

k)  $[1, 2] \times [0, 10] \cup [1, 2] \times [0, \infty[$ ,      l)  $[1, 2] \times [0, 10] \cup [1, 2] \times [0, 100]$ ,

m)  $\{f \in C(0, 2) \mid |f(t)| \leq 1 + t^2 \forall t \in [0, 2]\}$ ,      n)  $(1 + \frac{t}{n})_{n=1}^{\infty}$ .

4. Olisikohan Brouwerin kiintopistelauseella mitään tekemistä  $\mathbb{R}^2$ :n yhtälön

$$(x, y) = \left( \frac{100 \cos y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{100e^{-x^2}}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

ratkaisemisen kanssa?

5. Onko joukko

$$\{x + \pi \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

tiheä  $\mathbb{R}$ :ssä?