
Metriset avaruudet

Demo 12, kevät 2003

1. Laske lineaarikuvausten

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

etäisyys metrisessä avaruudessa a) $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, b) $(\mathbb{R}^{3 \times 3}, d_2)$.

Opastus a)-kohtaan. Etäisyys oli määritelmän mukaan

$$\max\{ |(A - B)x| \mid x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1 \}.$$

Laske matriisi $A - B$. Ota mielivaltainen (pysty)vektori $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ja laske $|(A - B)x|$. Mieti, mikä on tämän suurin arvo, kun tiedetään, että $|x| = 1$.

2. Laske lineaarikuvausten

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

etäisyys avaruudessa $L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.

3. Suppeneeko kuvausjono $(A^{(k)})_{k=1}^{\infty}$

$$A^{(k)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{1+k} & 1 & 0 \\ -2 & e^{-k^2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} & 3 \end{pmatrix}$$

avaruudessa $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$? Jos suppenee, onko

$$A := \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)}$$

kääntyvä?

4. Olkoon $(X, d) := (L(\mathbb{R}^n), d)$ ja $\Omega \subset X$,

$$\Omega := \{ A \in L(\mathbb{R}^n) \mid A \text{ on kääntyvä} \}.$$

Osoita, että Ω on avoin X :n osajoukko! (Lause 6.5)

5. Onko funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, missä

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &:= e^{-y^2}, \\ f_2(x, y, z) &:= x^2 + \cos \pi z, \\ f_3(x, y, z) &:= xyz, \end{aligned}$$

Jakobin matriisi kääntyvä pisteessä $(0, 1, \frac{1}{2})$?