
Metriset avaruudet

Demo 13, kevät 2003

1. Missä avaruuden \mathbf{R}^3 pisteissä funktio $f(x, y, z) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$f(x, y, z) := (z, x + y^2, y + x^2),$$

on lokaalisti bijektio? Etsi (rautalangasta vääntäen -menetelmällä) kaksi eri \mathbf{R}^3 :n pistettä, joissa f saa saman arvon. (Vihje: tarkastele esim. yhtälön $x^2 + x = 2$ ratkaisuja.)

2. Kuten tehtävä 1, mutta nyt

$$f(x, y, z) := (e^x(x^2 - y^2), \sin z, e^y).$$

3. Tarkastellaan yhtälöparia

$$2x_1 - y_2^2 = 0, \quad e^{x_2} - x_1 + y_1^3 + y_2 = 0,$$

missä x_1, x_2, y_1 ja y_2 ovat (reaaliluku)muuttujia. Voidaanko y_1 ja y_2 ratkaista muuttujien x_1 ja x_2 funktioina pisteen $x_1 = 8, x_2 = 0, y_1 = 3^{1/3}, y_2 = 4$ jossain ympäristössä?

4. Kuten tehtävä 3, mutta nyt yhtälöpari on

$$x_1 + y_1 - y_2 = 2, \quad x_2 + x_1^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = 0,$$

ja tarkastelupiste $x_1 = 1, x_2 = -2, y_1 = 3, y_2 = 2$.