
Metriset avaruudet

Demo 1, kevät 2004

1. Laske \mathbb{R}^3 :n pisteiden $a = (1, 0, 2)$ ja $b = (-3, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ etäisyys metriikoissa d_2 , d_1 ja d_∞ .
2. Ota vielä peliin piste $c = (0, 0, -1)$. Totea, että kolmioepäyhtälö toteutuu kaikille yllä mainituille metriikoille: $d_2(a, c) \leq d_2(a, b) + d_2(b, c)$ jne.
3. Piirrä tasossa \mathbb{R}^2 pallot $B_{d_1}((0, 0), 1)$, $B_{d_1}((4, 2), 3)$ ja $B_{d_1}((4, 2), \frac{1}{10})$.
4. Laske avaruudessa $C(-2, 2)$ alkioden f ja g etäisyydet metriikoissa d_∞ ja d_1 , kun
 - a) $f(t) = -1 + e^{-t}$, $g(t) = 100 + t^2 e^{-t}$,
 - b) $f(t) = t^2 - 1$, $g(t) = 3t^3$.
5. Osoita, että lauseke

$$d_\infty(f, g) := \max_{t \in]-2, 2[} |f(t) - g(t)|$$

ei ole hyvin määritelty metriikka joukossa X , jonka muodostavat avoimella välillä $] - 2, 2[$ jatkuvat funktiot. Vihje: Tarkastele esimerkiksi funktioita $f(t) = \frac{1}{2-t}$ ja $g(t) = 0$.