
Metriset avaruudet

Demo 2

Kevät 2004

1.-3. Tiedetään, että avaruuden \mathbb{R}^n metriikoille pätee $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ kaikilla x ja $y \in \mathbb{R}^n$. Nämä epäyhtälöt eivät kuitenkaan suinkaan aina ole aitoja, vaan joillekin alkioille x ja y näissä epäyhtälöissä pätee yhtäsuuruus.

Tutki tätä asiaa laskemalla \mathbb{R}^4 :n pisteiden x ja y etäisyys metriikoissa d_1 , d_2 ja d_∞ , kun

- a) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (5, 0, 3, -2)$,
- b) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (5, 2, 3, 4)$,
- c) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (3, 0, 3, 4)$,
- d) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (5, -2, 3, -2)$,
- e) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (3, -2, 3, 4)$,
- f) $x = (5, 0, 3, 4)$ ja $y = (3, -2, 3, -2)$.

Havaintosi?

- 4. Kuuluuko avaruuden $C(0, 1)$ alkio $f(t) := t^6 + t^8$ joukkoon $B_d(0, \frac{1}{2})$, kun metriikkana d on a) $d := d_1$, b) $d := d_\infty$?
- 5. Samoin, kuuluuko avaruuden $C(1, 5)$ alkio $f(t) := 2t$ joukkoon $B_d(1, 10)$, kun metriikkana d on a) $d := d_1$, b) $d := d_\infty$?