
Metriset avaruudet

Demo 3, kevät 2004

1. Tarkastellaan metristä avaruutta $X := \mathbb{R}$, varustettuna tavallisella metriikallaan. Kysymys: ovatko annetut joukot rajoitettuja, ja jos ovat, laske niiden halkaisija.

a) $A := \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

b) $A := \{\sin x \cos 2x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

c) $B := \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

2. Olkoon a) $X := (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ ja b) $X := (\mathbb{R}^2, d_1)$. Laske kummassakin tapauksessa X :n osajoukon

$$A := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

halkaisija. Vihje: poimi sopivat pisteparit koordinaattiakseleilta tai suorilta $y = x$.

3. Osoita, että

a) $(\frac{3}{2}, 3, 0)$,

b) $(1 + 10^{-6}, 3, 0)$

on \mathbb{R}^3 :n joukon $]1, 2[\times [2, 4] \times [-1, 1]$ sisäpiste.

4. Olkoon B metrisen avaruuden (X, d) osajoukko. Osoita, että joukko A ,

$$A := \{x \in X \mid \text{on olemassa } a \in B \text{ siten, että } d(a, x) < \frac{1}{10}\}$$

a) sisältää joukon B ,

b) on avoin X :n osajoukko. (Vihje: A on yhdiste avoimista palloista.)

5. Ovatko seuraavat \mathbb{R}^2 :n osajoukot avoimia tai suljettuja:

a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), \dots\}$,

c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 1), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{3}, 1), \dots, (\frac{1}{n}, 1), \dots\}$.