
Metriset avaruudetDemo 4, kevät 2004

1. Olkoon $(X, d) := \mathbb{R}^4$ ja $(x_n)_{n=1}^\infty$ jono, jonka n :s alkio on

$$x_n = \left(\frac{1}{1+n^2}, (-2)^n, e^{-n}, 3 \right).$$

Suppeneeko kyseinen jono X :ssä?

2. Suppeneeko $C(-5, 4)$:n jono $(f_n)_{n=1}^\infty$ metriikassa d_∞ , kun

a) $f_n(t) = \frac{1}{20 + (t/n)},$

b) $f_n(t) = \left(\frac{t}{5}\right)^n,$

c) $f_n(t) = \left(\frac{t}{10}\right)^n?$

3. Osoita, että kuvaus

a) $f(x) = e^{-x^2},$

b) $f(x) = \frac{1}{10} \frac{x}{1+2|x|}$

on kontraktio joukossa \mathbb{R} . (Vihje: a-kohdassa väliarvolause)

4. Onko funktio $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ kontraktio joukossa

a) $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}],$

b) $[-2, 2],$

c) $\mathbb{R}?$

5. Tarkastellaan kuvausta $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{10}(x_1^2, x_1 - x_2)$, missä x_1 ja $x_2 \in \mathbb{R}$. Osoita, että tämä on kontraktio joukossa A , jonka muodostavat ne tason pisteet $x = (x_1, x_2)$, joille $-1 \leq x_1 \leq 1$ ja $-1 \leq x_2 \leq 1$. Neuvo. Muodosta viileästi harkiten lauseke $d_2(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2))$, missä $x = (x_1, x_2) \in A$ ja $y = (y_1, y_2) \in A$. Yritä arvioida tätä ylhäältä esimerkiksi lausekkeella vakio $\cdot (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$, joka taas on pienempää kuin joku toinen (pieni) vakio $\cdot d_2(x, y)$.