
Metriset avaruudet

Demo 5, kevät 2004

1. ”Ratkaise” yhtälöt

a) $x = \frac{1}{3} + e^{-x^2}$,

b) $\sin x + 10x - 5 = 0$,

missä $x \in \mathbb{R}$; tarkemmin sanoen, osoita, että yhtälöillä on jollain sopivalla suljetulla välillä yksikäsitteinen ratkaisu ja esitä, miten ratkaisua voidaan approksimoida.

2. Tutki yhtälön

$$x = \left(\frac{1}{10}, 0, -\frac{1}{100} \right) + \frac{1}{10}(x_2^2, x_1^2, x_1 - x_3)$$

ratkaisemista \mathbb{R}^3 :ssa; tässä $x = (x_1, x_2, x_3)$. Neuvo. Kiintopistelause esim. aliavaruudessa $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2, 3\}$.

3. Onko kuvaus

a) $(Tf)(t) = f(t^2)$,

b) $(Tf)(t) = \frac{1}{2}f(t^3)$,

c) $(Tf)(t) = \frac{1}{2}f(t)^2 \cos t$,

kontraktio avaruudessa $(C(-1, 1), d_\infty)$? Kohdassa c), jos vastaus on negatiivinen, onko T kontraktio jossain $C(-1, 1)$:n aliavaruudessa?

4. Osoita, että operaattori T ,

$$(Tf)(t) = e^{-t} \int_0^1 f(s) ds$$

on kontraktio avaruudessa $(C(0, 1), d_1)$.

5. Tutki operaattorin

a) $(Sf)(t) := \int_{-5}^5 e^{-100|t|-100|s|} f(s) ds$,

b) $(Rf)(t) := \int_{-5}^5 e^{-100|t|-100|s|} f(s)^2 ds$

kontraktiivisuutta avaruudessa $(C(-5, 5), d_\infty)$. Neuvo. Ota ensin t -riippuvuus pois integraalimerkin alta. Käytä hyväksi integroinnissa muuttujanvaihdosta saatavaa pientä kerrointa.