

---

## Metriset avaruudet

Demo 8, kevät 2004

---

1. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus, ja  $A \subset X$  ja  $B \subset X$ . Osoita:

a)  $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ ,

b)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,

c)  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ,

Osoita, että kohdassa c) ei päde yleensä yhtäsuuruus; esimerkiksi  $X := \mathbb{R}$ ,  $A = \{\text{rationaaliluvut}\}$ ,  $B = \{\text{irrationaaliluvut}\}$ .

2. Osoita: Jos  $(X, d)$  on täydellinen ja  $\tilde{d} \sim d$  avaruudessa  $X$ , niin  $(X, \tilde{d})$  on täydellinen.

3. Tarkastellaan avaruutta  $C(-10, 10)$ . Onko tavanomainen metriikka  $d_\infty$  ekvivalentti metriikan

$$d(f, g) := \max_{t \in [-10, 10]} (2 + \sin t) |f(t) - g(t)|$$

kanssa?

4. Samoin, mutta

$$d(f, g) := \max_{t \in [-10, 10]} (10 - |t|) |f(t) - g(t)|.$$

5. Olkoon  $X$  avaruuden  $\mathbb{R}^2$  aliavaruus,

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ja  $Y$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$  aliavaruus

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, |y| \leq 2, z \leq 1\}.$$

Tutki pisteitä  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  sekä  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ , missä  $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $\tilde{a} = (1, 0)$ ,  $b = (0, 1, 1)$ ,  $\tilde{b} = (0, 2, 2)$ .

Kuuluvatko ne seuraaviin joukkoihin:

a)  $X \times Y$ ,

b)  $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3) \setminus (X \times Y)$ ,

c)  $X \times (\mathbb{R}^3 \setminus Y)$ .