
Metriset avaruudet

Demo 9, kevät 2004

1. Kuuluvatko Demon 8 tehtävän 5 pisteet tuloavaruuden $X \times Y$ $(\bar{0}, \bar{0})$ -keskiseen, 2-säteiseen palloon a) d_1 -metriikassa, b) d_∞ -metriikassa. (Sekä X että Y on varustettu itse euklidisella metriikalla!)
2. a) Peitä väli $] -2, 0[$ muutamalla avoimella $\frac{1}{3}$ -pituisella välillä (eli etsi n kpl avoimia välejä I_j , $j = 1, \dots, n$, joiden pituus on $\frac{1}{3}$, ja joille

$$\bigcup_{j=1}^n I_j \supset] -2, 0[$$

b) Samoin, peitä \mathbb{R}^3 :n ellipsoidi

$$\{ (x, y, z) \mid (x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 1 \}$$

äärellisellä määrällä d_∞ -metriikan palloja $B_{d_\infty}(a, 1)$, missä $a \in \mathbb{R}^3$.

3. Onko avaruuden \mathbb{R}^2 jonolla $(x_n)_{n=1}^\infty$, missä määritellään

$$x_1 = (1, 0), \quad x_n := -x_{n-1} + (3^{-n}, 0),$$

kun $n > 1$, suppenevaa osajonoa?

4. Onko avaruuden \mathbb{R}^3 jonolla $(x_n)_{n=1}^\infty$, missä $x_n = (0, \frac{1}{n}, n)$, suppenevaa osajonoa?
5. Mitkä seuraavista metrisistä avaruuksista ovat kompakteja, prekompakteja, rajoitettuja, täydellisiä? Kohdat a)–e) ovat \mathbb{R} :n aliavaruuksia, f)–l) \mathbb{R}^2 :n aliavaruuksia ja m)–n) $C(0, 2)$:n aliavaruuksia.
 - a) $]10, 100[$, b) $[10, \infty[$,
 - c) $[10, 100]$, d) $[10, 100] \cup [200, 300]$,
 - e) $[10, 100] \cup]200, 300[$, f) $[1, 2] \times [0, \infty[$,
 - g) $[1, 2] \times]0, 10[$, h) $]1, 2[\times]0, 10[$,
 - i) $[1, 2] \times [0, 10]$, j) $[1, 2] \times [0, 10] \cup]1, 2[\times [0, 100]$,
 - k) $[1, 2] \times [0, 10] \cup [1, 2] \times [0, \infty[$, l) $[1, 2] \times [0, 10] \cup [1, 2] \times [0, 100]$,
 - m) $\{ f \in C(0, 2) \mid |f(t)| \leq 1 + t^2 \forall t \in [0, 2] \}$, n) $(1 + \frac{t}{n})_{n=1}^\infty$.