
Metriset avaruudet

Demo 10, kevät 2004

1. Olisiko Brouwerin kiintopistelauseella mitään tekemistä \mathbb{R}^2 :n yhtälön

$$(x, y) = \left(\frac{100 \cos y}{2 + x^2 + y^2}, \frac{100e^{-x^2}}{2 + x^2 + y^2} \right)$$

ratkaisemisen kanssa?

2. Onko joukko

$$\{x + \sqrt{\pi} \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

tiheä \mathbb{R} :ssä?

3. Totea, että lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^2 |f(t)| dt$$

on normi avaruudessa $C(0, 2)$. (Käytä apuna metriikka d_1).

4. Samoin lausekkeelle

$$\|f\|_w := \int_0^2 e^{-t} |f(t)| dt.$$

5. Pohdi kysymystä, miksi Schauderin kiintopistelause soveltuu Banachin kiintopistelausetta paremmin integraaliyhtälön

$$f(t) = \int_{-2}^2 100e^{-|t|-|s|} \frac{f(s)}{1 + f(s)^2} ds$$

ratkaisemiseen. Löydätkö ratkaisua ”rautalangasta vääntäen” -menetelmällä?
 $f \in C(-2, 2)$.