

---

## Metriset avaruudet

Demo 11, kevät 2004

---

1.-3. Tutki luvun 5 tulosten valossa, onko seuraavilla funktioilla lähtöjoukossaan suurinta tai pienintä arvoa ja onko kuvajoukko yhtenäinen tai kompakti.

a)  $f : ]0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ,

b)  $f : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2 + e^{-x_1^2} \cos x_2$ ,

c)  $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$

d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cosh(x_1 x_2) + \cos x_3 \sin x_1$ ,

e)  $f : [-10, -8] \times [5, 6] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f$  sama kuin kohdassa d).

Huom! Suurinta tai pienintä arvoa ei tarvitse laskea, riittää tutkia sen olemassaoloa.

4. Olkoon  $X$  joukko  $C(5, 10)$ , mutta varustettuna tällä kertaa metriikalla

$$d_1(f, g) := \int_5^{10} |f(t) - g(t)| dt.$$

Osoita, että kuvaus  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F : f \mapsto \int_5^{10} f(t) \sin t dt$$

on jatkuva pisteessä 0 (joka siis on 0-funktio välillä  $[5, 10]$ ).

5. Olkoon  $X$  kuten tehtävässä 4, ja tarkastellaan kuvausta  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$G : f \mapsto f(7).$$

Osoita, että  $G$  ei ole jatkuva. Neuvo. On mahdollista löytää jono  $X$ :n alkioita,  $(f_n)_{n=1}^\infty$ , joille  $f_n(7) = 1$  kaikilla  $n$ , mutta toisaalta  $f_n \rightarrow 0$  metriikan  $d_1$  mielessä avaruudessa  $X$ . Tästä seuraa  $G$ :n epäjatkuvuus (miksi?). Funktiot  $f_n$  voi esimerkiksi määrittellä kaavalla

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - n|t - 7|, & 7 - \frac{1}{n} \leq t \leq 7 + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Piirrä funktioiden kuvaajat, ja todista esitetyt väitteet.