

---

**Metriset avaruudet**Demo 12, kevät 2004

---

1. Onko kuvaus  $T : C(-1, 1) \rightarrow C(-2, 2)$ ,  $(Tf)(t) := f(2t)$  jatkuva? ( $d_\infty$ -metriikka)
2. Samoin, mutta  $(Tf)(t) := f(2t)^2$ . (Vihje: On. Näytä, että  $T$  on Lipschitz, kun rajoitutaan mielivaltaiseen origokeskiseen palloon  $B(0, R) \subset C(-1, 1)$ . Miten tästä seuraa  $T$ :n jatkuvuus koko avaruudessa?)
3. Olkoon  $A$  avaruuden  $C(-2, 2)$  aliavaruus, johon kuuluvat kaikki jatkuvasti derivoituvat funktiot. Onko derivaattakuvaus  $S : f \mapsto f'$  jatkuva kuvauksena  $A \rightarrow C(-2, 2)$ ?  
Vihje: Tarkastele funktiojonoa

$$(f_n)_{n=1}^\infty \subset A, \quad f_n(t) := n^{-\frac{1}{4}} \sin nt.$$

Mikä on  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} S f_n$ ?

4. Tarkastele vielä edellistä tehtävää funktiojonon

$$(g_n)_{n=1}^\infty, \quad g_n(t) := n^{-\frac{1}{2}} (t^2/4)^n$$

kannalta.

5. Tarkastellaan kuvausta

$$G : C(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad G : f \mapsto 2 + \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

Tällöin  $G(\sin t) = 2$ . (Todenna!) Etsi sellainen pisteen  $\sin t$  palloympäristö  $B(\sin t, r) \subset C(-1, 1)$ , että  $G(B(\sin t, r)) \subset ]2 - 10^{-6}, 2 + 10^{-6}[$ .