
Metriset avaruudet

Demo 13, kevät 2004

1. Ovatko seuraavat kuvaukset bijektioita tai homeomorfismeja:

a) $\Psi : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$, $\Psi(x) = \frac{x}{|x|} + 1 - |x|$, missä määritellään $x/|x| = 1$, kun $x = 0$. Piirrä Ψ :n kuvaaja.

b) $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$, missä $B(0, 1)$ on tason \mathbb{R}^2 avoin yksikköpallo, ja f :n lauseke napakoordinaateissa on

$$f : (r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (r^2 \cos \theta, r \sin \theta).$$

(Yritä muodostaa f :n käänteiskuvaus.)

2. Samoin, kuvaus $T : C(-2, 2) \rightarrow C(-1, 1)$, $(Tf)(t) = f(2t)$.

3. Osoita, että identtinen kuvaus $I : Y \rightarrow X$ ei ole jatkuva, kun $X = Y = [0, 1]$, ja Y :ssä tavanomainen metriikka $d_Y(x, y) = |x - y|$ ja X :ssä diskreetti metriikka $d_X(x, y) = 1$, $x \neq y$, ja $d_X(x, y) = 0$, $x = y$.

4. Olkoon $f : X \rightarrow Y$ jatkuva bijektio. Osoita, että f :n käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva jos ja vain jos f on avoin kuvaus.

5. Tarkastellaan tehtävän 1 a) funktiota Ψ . Etsi joku välin $[-2, 2]$ epäyhtenäinen osajoukko A ja yhtenäinen osajoukko B , joille pätee $\Psi(A) = B$.