

Matematiikan perusopintojakso kevät 2001

Laskuharjoitus 5 vk 8

Vähän fysiikkaa, eli tietoa, jota tarvitset ratkaistakseksi tehtävät 2 ja 3. Fysikaalinen suure työ on aiemmin määritelty siten, että kun tietyllä voimalla F kappaletta siirretään matkan s verran tehdään kappaleelle työtä $W=Fs$. Tässä oletetaan voima vakioksi, mutta täytyykö voiman välttämättä olla vakio? Ei täydy. (Eihän sinäkään työnä ostoskärryjä samalla voimalla koko kauppareissun ajan.) Tästä syystä voima on muuttuva suure. Jos voima muuttuu matkan suhteen, voidaan työ tällöin laskea integraalin

$$W = \int F(x) dx$$

avulla. Tässä matkaa on merkitty muuttujalla x .

Tehtävät

1. Maapinnan muoto merenrannassa noudattaa funktiota

$$f(x) = -\cos x - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x - 4.$$

Nousuveden aikana pohjaa ei näy, mutta laskuvesi paljastaa rannan läheisyydessä olevan pohjan kohouman. Kohouman ja rannan väliin jää tällöin luonnon oma uimaallas. Kuinka pitkä ihminen voisi kävellä tämän altaan syvimmissä kohdassa ilman sukellusvälineitä laskuveden aikana?

2. Jouta venytään voimalla

$$F(x) = 4e^x - e^{x^2},$$

missä x on matka metreinä. Mikä työ tehdään 0,01 J tarkuudella, kun jouta venytetään 10 cm?

3. Maan gravitaatiovoima massalle m on

$$F(x) = \frac{-GMm}{x^2}, \text{ missä } G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \text{ ja } M = 6 \cdot 10^{24} kg.$$

Jos raketin massa on 1000 kg, niin minkä työn raketin moottorit tekevät nostaessa raketin korkeudelta 6400m korkeudelle 6500m? Mikä on virhe, kun sama tehtävä lasketaan puolisuunnikkasäännöllä $n=3$?

4. Minkä kasvin lehteä käyrä $r(\theta) = 1 + \frac{4}{3} \cos \theta$ muistuttaa?

5. Lentokoneen lentokentälle lähestyminen noudattaa tietyssä korkeudessa käyrää $r(\theta) = \theta$ (km), kun $\theta \in [4\pi, 5\pi]$. Kuinka pitkän matkan lentokone lentää tällä välillä?

6. Ydinvoimalaonnettomuuden sattuessa, tutkijat ovat laskeneet, että ydinsaasteet leviävät ensimmäisenä päivänä käyrän $r(\theta) = 0,5 \sin \theta$ sisään jäävälle alueelle. Kuinka suuri on tämä alue? Toisena päivänä leviämisalue jää käyrän $r(\theta) = 8 \cos \theta$ ja vuoriston, joka kulkee käyrää $r(\theta) = \frac{4}{\cos \theta}$ pitkin, rajoittamalle alueelle. Kuinka suuri tämä alue on?