

Matematiikan tietotekniikka

Syksy 2000

Harjoitus 3.

27.9.2000

1. Osoita, että funktio

$$f(x, y, z) = \frac{\sin\left(\frac{nz\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} f + \frac{d^2}{dy^2} f + \frac{d^2}{dz^2} f \right) + n^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} f + \frac{d^2}{dy^2} f \right) = 0.$$

2. Laske raja-arvot

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{x}\right)^x \quad b) \lim_{t \rightarrow \infty} (2^t + 3^t)^{1/t} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$$

3. Laske seuraavien sarjojen summat

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k + 1}{(k+2)!} \quad b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k-1)^2(k+1)^2} \quad c) \sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

Onko c)-kohdan tulos oikein? Saatko saman tuloksen laskemalla ensin n . osasumman ja ottamalla tästä raja-arvon?

4. Laske integraalit

$$a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad b) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos^2(bx) dx, \quad a > 0 \quad c) \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin t^2 x dx$$

5. Tutustu Maple-komentoon `taylor`, jolla voi laskea funktion *Taylor-kehitelmiä* (Analyysi 2) jossakin pisteessä. Laske funktion $g(x) = \sin x$ eri asteisia Taylor-kehitelmiä pisteessä $x = 0$ ja piirrä kuvaajat. Useita funktiota saa piirrettyä samaan kuvaan luettelemalla funktiot hakasuluissa, esimerkiksi `plot([f,g], x=0-5..5)`

6. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0.$$

Mitä ovat ratkaisussa esiintyvät funktiot? Piirrä niiden kuvaajat.

Palautettava tehtävä Tee Maple-työarkki, jolla voidaan laskea *Fourier-sarjoja*: Välillä $[-L, L]$ määriteltyyn funktioon f liittyvä Fourier-sarja on muotoa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

missä kertoimet a_n, b_n on määritelty kaavoilla

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Voit olettaa, että f on määritelty välillä $[-\pi, \pi]$, jolloin kaavat ovat yksinkertaisempia. Testaa työärsin toimivuutta esimerkiksi funktiolla $f(x) = x$ piirtämällä Fourier-sarjan eri osasummia.