

Matematiikan tietotekniikka

Syksy 2000

Harjoitus 8.

1.11.2000

1. Kirjoita M-tiedostoon van der Polin differentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(1 - y_2^2) - y_2 \\y_2' &= y_1\end{aligned}$$

ja ratkaise se numeerisesti MATLABin ode45-ratkaisijalla. Piirrä samaan kuvaan funktioiden y_1 ja y_2 kuvaajat.

2. Useamman muuttujan funktion minimointiin (lokaalin minimin etsimiseen) voidaan käyttää MATLAB-komentoa `fminu` samaan tapaan kuin funktiota `fmin`. Tutustu komentoon, kirjoita M-tiedostoon *Rosenbrockin funktio*

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (1)$$

ja etsi sen lokaali minimi aloittaen jostain alkuarvosta. Näyttäisikö alkuarvon valinnalla olevan merkitystä?

3. Kirjoita MATLAB Primerista sivuilla 19-20 oleva funktio `torus` M-tiedostoksi ja piirrä sen avulla `torus`. Kuinka saat samaan kuvaan useita toruksia, jotka sijaitsevat eri kohdissa?

4. Piirrä MATLABilla vaahteranlehti harjoituksista 4.

5. Piirrä MATLABilla Enneperin pinta harjoituksista 4.

6. Tutustu piirtokomentoon `quiver`. Piirrä Rosenbrockin funktiolle (1) kuvaaja (pinta) sekä `quiver`-helpin esimerkin mukainen kuva.

Palautettava tehtävä Merkitään avaruuden \mathbb{R}^{2n} pisteitä y muodossa

$$y = (\underbrace{p_1, \dots, p_n}_n, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_n).$$

Jos on annettu funktio $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, niin *Hamiltonin systeemi* (differentiaaliyhtälö) määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned}p_i' &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, i = 1, \dots, n \\q_i' &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

Jos esimerkiksi

$$H(p_1, q_1) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{q_1^2}{2},$$

jolloin siis $n = 1$, saadaan derivoimalla Hamiltonin systeemiksi

$$\begin{aligned} p_1' &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1 \\ q_1' &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 \end{aligned}$$

joka on luennoilla esillä ollut harmonisen värähtelijän yhtälö. Muodosta samaan tapaan esimerkiksi Maplella Hamiltonin systeemi funktiolle

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}},$$

kirjoita yhtälöt M-tiedostoksi ja ratkaise ne MATLABilla alkuarvolla $[1, 0, 1, 1]'$. Piirrä ratkaisusta pisteiden (p_1, p_2) ja (q_1, q_2) kuvaajat. Ohje: MATLABille differentiaaliyhtälön muuttujat annetaan yhdessä vektorissa y . Tämän vuoksi M-tiedostossa y on 4-vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned} y(1) &= p_1 \\ y(2) &= p_2 \\ y(3) &= q_1 \\ y(4) &= q_2 \end{aligned}$$

Jos yhtälö on oikein ratkaistu, kuvaajien pitäisi muistuttaa ellipsejä.