Funktion todellista suurinta ja/tai pienintä arvoa voidaan soveltaa käytännön optimointitehtävissä, kun halutaan vaikkapa maksimoida myyntivoitto tai minimoida tuotantokustannukset.

Huomaa, että funktiolla ei aina ole suurinta tai pienintä arvoa. Esimerkiksi

- funktiolla $f(x) = x^2$ on pienin arvo $f(0) = 0$, mutta ei ole suurinta arvoa joukossa $\mathbb{R}$,
- funktiolla $g(x) = x^3$ ei ole suurinta eikä pienintä arvoa joukossa $\mathbb{R}$.

Olkoon f jatkuva reaalifunktio suljetulla välillä $[a, b]$. Tällöin f saa aina suurimman ja pienimmän arvonsa sekä kaikki niiden välissä olevat arvot. Ääriarvokohta voi olla

- välillä olevissa derivaatan nollakohdissa,
- välillä olevissa derivoitumattomuuskohdissa,
- välin päätepisteissä.

Esimerkki 8.13 Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2$ suljetulla välillä $[-1, 1]$. f on selvästikin jatkuva ja derivoituva ko. välillä. Derivaatan $f'(x) = 2x$ ainoa nollakohta on $x = 0$. Funktion f pienin arvo on $f(0) = 0$ (derivaatan nollakohdassa) ja suurin arvo $f(-1) = f(1) = 1$ (välin päätepisteissä).

Esimerkki 8.14 Määrää funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, suurin ja pienin arvo välillä $[0, 2]$.

Ratkaisu. Funktio f on jatkuva ja derivoituva välillä $[0, 2]$, joten sillä on suurin ja pienin arvo ja ne voivat sijaita joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Funktion f derivaatta on

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}.$$

Koska $e^{-x} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin piste $x = 1$ on ainoa derivaatan nollakohta. Lisäksi $1 \in [0, 2]$. Lasketaan funktion f arvot mahdollisissa ääriarvokohdissa: $f(0) = 0$, $f(2) = 2e^{-2} \approx 0,27$ ja $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$.

Vastaus. Funktion f pienin arvo on $f(0) = 0$ ja suurin arvo $f(1) = 1/e$.

Esimerkki 8.15 Yrityksen tuotantonopeus on q kpl/kk. Kuukausittaiset myyntitulot R noudattavat funktiota $R(q) = 4000q - 33q^2$, yksikkönä mk/kk. Tuotantokustannukset C tuotantonopeuden q funktiona noudattavat funktiota $C(q) = 2q^3 - 3q^2 + 400q + 5000$, yksikkönä mk/kk.

(a) Mitkä ovat funktioiden R ja C määrittelyissä esiintyvien vakioiden mittayksiköt?

(b) Millä tuotantonopeudella yrityksen kuukausivoitto maksimoituu?

Ratkaisu. (a) Jotta myyntitulojen R mittayksiköksi saataisiin mk/kk, on vakioiden yksiköt valittava seuraavasti:

$$R(q) = 4000 \left(\frac{\text{mk}}{\text{kpl}} \right) q - 33 \left(\frac{\text{mk} \cdot \text{kk}}{\text{kpl}^2} \right) q^2.$$

Vastaavasti,

$$C(q) = 2\left(\frac{\mathrm{mk}\cdot\mathrm{kk}^2}{\mathrm{kpl}^3}\right)q^3 - 3\left(\frac{\mathrm{mk}\cdot\mathrm{kk}}{\mathrm{kpl}^2}\right)q^2 + 400\left(\frac{\mathrm{mk}}{\mathrm{kpl}}\right)q + 5000\left(\frac{\mathrm{mk}}{\mathrm{kk}}\right).$$

(b) Määritellään voittofunktio P asettamalla

$$P(q) = R(q) - C(q) = -2q^3 - 30q^2 + 3600q - 5000.$$

Funktion P derivaatta on

$$P'(q) = \frac{d}{dq}P(q) = -6q^2 - 60q + 3600.$$

Derivaatan P' nollakohdat saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla: $q_1 = -30$ ja $q_2 = 20$. Laaditaan merkkikaavio (sijoittamalla koearvot kustakin alueesta funktiolle P'):

P'	-	|	+	|	-
P	aid. vähenevä	|	aid. kasvava	|	aid. vähenevä
		-30		20	

Itse asiassa ei ole järkevää tarkastella negatiivisia tuotantonopeuden q arvoja, joten rajoitumme välille $0 \leq q < \infty$. Kun tuotantonopeutta kasvatetaan rajatta, ts. kun $q \longrightarrow \infty$, niin

$$\lim_{q\to\infty} P(q) = -\infty.$$

Näin ollen, voittofunktio P saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $q = 20$ kpl/kk, jolloin $P(20) = 39000$ mk/kk. Tuotantonopeus $q = 20$ kpl/kk siis maksimoi kuukausivoiton.

Osittaisderivaatat

Osittaisderivoinnilla tarkoitetaan kahden tai useamman reaalimuuttujan funktion derivoimista yhden valitun muuttujan suhteen siten, että muita muuttujia käsitellään vakioina. Seuraavassa tarkastelemme lyhyesti kahden muuttujan tapausta.

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kahden reaalimuuttujan funktio (merkintä $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tarkoittaa tasoa, tai oikeammin, kahden reaalilukujoukon *karteesista tuloa*). Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ muuttujan x suhteen otettua osittaisderivaattaa pisteessä $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ merkitään esimerkiksi

$$\frac{\partial}{\partial x} f\Big|_{(a,b)} \quad \text{tai} \quad f_x(a, b),$$

missä ∂ on venäjänkielinen kirjain "doo". Muuttujan y suhteen otettua derivaattaa merkitään vastaavalla tavalla.

Esimerkki 8.16 Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 + x$. Funktion f osittaisderivaatat ovat $f_x(x, y) = 2x - 3y + 1$ ja $f_y(x, y) = -3x + 4y$.

Yhden muuttujan funktion derivoituvuutta vastaa useamman muuttujan funktion *differentioituvuus*, joka on voimakkaampi ehto kuin pelkkien osittaisderivaattojen olemassaolo. Asiasta lisää kursseilla Analyysi II ja Analyysi 3.