

Numeerinen analyysi

Harjoitus 3

1. Laske puolisuunnikassääntöä käyttäen $\int_0^1 x^3 dx$ valitsemalla $n = 5$. Suorita virhearvio ja vertaa tulosta tarkkaan arvoon.
2. Jaetaan väli $[a, b]$ eripituisiin osaväleihin $[x_k, x_{k+1}]$ siten, että $x_{k+1} - x_k = h_{k+1}$, $(0 \leq k \leq n-1)$. Osoita, että puolisuunnikassääntöä vastaava sääntö on

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}[f(a) + f(x_1)]h_1 + \dots + \frac{1}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)]h_n.$$

3. Olkoon $P(x)$ toisen asteen polynomi, joka saa pisteissä $x_0, x_1 = x_0 + h$ ja $x_2 = x_0 + 2h$ samat arvot kuin funktio f . Osoita, että

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x) dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

4. Montako osaväliä tarvitaan sovellettaessa puolisuunnikassääntöä integraalin $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ laskemiseen kuuden desimaalin tarkkuudella?
5. Ratkaise tehtävä 4, kun puolisuunnikassääntöä asemasta käytetään Simpsonin kaavaa.