Ratkaisu

Lagrangen interpoloiva polynomi on muotoa

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x),$$

missä

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \text{ kaikilla } i \neq k,\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Annettujen datapisteiden $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_3, f(x_3))$ kautta voidaan muodostaa korkeintaan astetta $n = 3$ oleva Lagrangen muotoa oleva interpolaatiopolynomi. Lasketaan Lagrangen kerroinpolynomit,

$$L_{3,0}(x) = \frac{(x-1.1)(x-1.3)(x-1.4)}{(1-1.1)(1-1.3)(1-1.4)} = -\frac{250}{3}(x-1.1)(x-1.3)(x-1.4),$$

$$L_{3,1}(x) = \frac{(x-1)(x-1.3)(x-1.4)}{(1.1-1)(1.1-1.3)(1.1-1.4)} = \frac{500}{3}(x-1)(x-1.3)(x-1.4),$$

$$L_{3,2}(x) = \frac{(x-1)(x-1.1)(x-1.4)}{(1.3-1)(1.3-1.1)(1.3-1.4)} = -\frac{500}{3}(x-1)(x-1.1)(x-1.4),$$

$$L_{3,3}(x) = \frac{(x-1)(x-1.1)(x-1.3)}{(1.4-1)(1.4-1.1)(1.4-1.3)} = \frac{250}{3}(x-1)(x-1.1)(x-1.3),$$

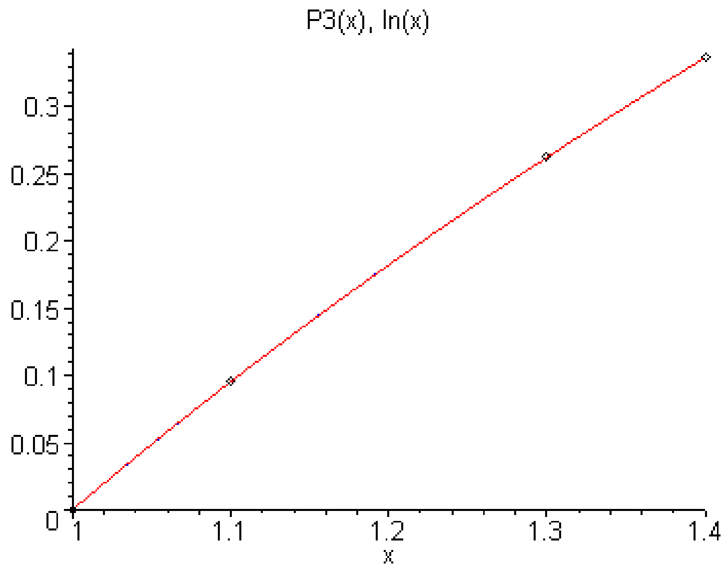
Nyt

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \ln(1)L_{3,0} + \ln(1.1)L_{3,1} + \ln(1.3)L_{3,2} + \ln(1.4)L_{3,3} \\ &= 0.1970x^3 - 1.063x^2 + 2.5325x - 1.6669 \end{aligned}$$

Virheen itseisarvolle $|f(x) - P_3(x)|$ välillä $[x_0, x_3]$ saadaan arvio

$$\begin{aligned} |\ln(x) - P_3(x)| &= \tfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-1.1)(x-1.3)(x-1.4), \\ & \quad\ \xi \in (1, 1.4) \\ &\leq \tfrac{1}{24}\max|\tfrac{-6}{\xi^4}|\max|(x-1)(x-1.1)(x-1.3)(x-1.4)|, \\ & \quad\ x, \xi \in [1, 1.4] \\ &\leq \tfrac{1}{24}\max|\tfrac{-6}{1^4}|\max|(1.4-1)(1.4-1.1)(1-1.3)(1-1.4)| \\ &= 0.036 \end{aligned}$$

Annettua funktiota voidaan siis approksimoida interpolaatiovälillä $[1, 1.4]$ hyvinkin tarkasti, mikä käy ilmi myös alla olevasta kuvaajasta, jossa on esillä funktio $\ln(x)$ sekä laskettu polynomi $P_3(x)$.


P3(x), ln(x)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
1.1
1.2
1.3
1.4
x