

Ratkaisu

Etsitään siis pisteiden

x_j	$f(x_j)$
-2.0	2.0
-1.0	1.0
1.0	1.0
3.0	2.0
4.0	1.0

kautta kulkevaa kullakin osavälillä muotoa

$$(1) \quad S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

olevaa kolmannen asteen polynomia seuraavin ehdoin

- (a) $S(x_j) = f(x_j)$, kaikilla $j = 0, 1, 2, 3, 4$;
- (b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, kaikilla $j = 0, 1, 2$;
- (c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$, kaikilla $j = 0, 1, 2$;
- (d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$, kaikilla $j = 0, 1, 2$;
- (e) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, Luonnollinen reunaehto.

Selvästi

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j), \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3.$$

Määrittämällä solmupisteiden välinen etäisyys

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

ja huomioimalla avoimen välin $]a, b[=]x_0 < x_1 < \dots < x_4[$ solmupisteiden jatkuvuusehto (b) sekä määrittämällä $a_4 = f(x_4)$, saadaan polynomi (1) muotoon

$$(2) \quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3, \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3.$$

Edelleen

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2.$$

Selvästi

$$S'_j(x_j) = b_j$$

ja määrittämällä $b_4 = S'(x_4)$ sekä huomioimalla avoimen välin $]a, b[$ solmupisteiden 1. kertaluvun derivaattaa koskeva jatkuvuusehto (c), saadaan

$$(3) \quad b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3.$$

Määrittämällä lisäksi $c_4 = S''(x_4)/2$ seuraa avoimen välin $]a, b[$ solmupisteiden 2. kertaluvun derivaattaa koskevan jatkuvuusehdon (d) mukaan

$$(4) \quad c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j, \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3.$$

Ratkaisemalla d_j yhtälöstä (4), antaa suora sijoitus yhtälöihin (2) ja (3)

$$(5) \quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

ja

$$(6) \quad b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3.$$

Ratkaisemalla b_j yhtälöstä (5)

$$(7) \quad b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}) \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2, 3$$

ja tällöin

$$(8) \quad b_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1}}(a_{j+2} - a_{j+1}) - \frac{h_{j+1}}{3}(2c_{j+1} + c_{j+2}) \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, 2.$$

Laskettujen kertoimien b_j, b_{j+1} lausekkeiden sijoitus yhtälöön (6) tuottaa yhtälöryhmän

$$(9) \quad h_j c_j + 2(h_j + h_{j+1})c_{j+1} + h_{j+1}c_{j+2} = \frac{3}{h_{j+1}}(a_{j+2} - a_{j+1}) - \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j),$$

kaikilla $j = 0, 1, 2$. Kyseinen yhtälöryhmä on alimäärätty, 3 yhtälöä/5 muuttujaa c_j . Tarvitaan välin $[a, b]$ päätepisteiden 2. kertaluvun derivaattaa koskevat lisäehdot, jotka luonnollisten reunaehtojen tapauksessa ovat edellä annetut (e)

$$S''(a = x_0) = S''(b = x_4) = 0.$$

Tällöin

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) \Rightarrow c_0 = 0.$$

Lisäksi määritelmän mukaan $c_n = S''(x_n)/2 = 0$. Voidaan osoittaa, että näin muodostetulla kvadraattisella yhtälöryhmällä $Ac = b$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkin tapauksessa solmupisteiden välinen etäisyysvektori

$$h = (1, 2, 2, 1)$$

ja matriisiyhtälö $Ac = b$ saadaan muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3/2 \\ -9/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jonka ratkaisuna

$$c = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{17}{20}, 0\right).$$

Kertoimet $\{b_j\}_{j=0}^3$ saadaan nyt suoralla sijoituksella yhtälöön (7),

$$b = \left(-\frac{17}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}, -\frac{13}{30}\right)$$

ja kertoimet $\{d_j\}_{j=0}^3$ puolestaan yhtälöstä (4),

$$d = \left(\frac{2}{15}, -\frac{1}{60}, \frac{-23}{120}, \frac{17}{60}\right).$$

Muodostetaan lopuksi polynomi $S(x)$ poimimalla kullekin osavälille laskettujen palapolynomien $\{S_j(x)\}_{j=0}^3$ kertoimet a_j, b_j, c_j ja d_j . Saadaan

$$S(x) = \begin{cases} 4/5 + 7/15x + 4/5x^2 + 2/15x^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 13/20 + 1/60x + 7/20x^2 - 1/60x^3, & -1 \leq x \leq 1 \\ 33/40 - 61/120x + 7/8x^2 - 23/120x^3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -12 + 739/60x - 17/5x^2 + 17/60x^3, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

