

## Ratkaisu

Nyt pisteiden

| $x_j$ | $f(x_j)$ |
|-------|----------|
| -2.0  | 2.0      |
| -1.0  | 1.0      |
| 1.0   | 1.0      |
| 3.0   | 2.0      |
| 4.0   | 1.0      |

kautta kulkevaa kuutiospliniä  $S(x)$  määritetään ehdoin

- (a)  $S(x_j) = f(x_j)$ , kaikilla  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ;
- (b)  $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ , kaikilla  $j = 0, 1, 2$ ;
- (c)  $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ , kaikilla  $j = 0, 1, 2$ ;
- (d)  $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ , kaikilla  $j = 0, 1, 2$ ;
- (e)  $S'(x_0) = f'(x_0) = -2$ ,  $S'(x_n) = f'(x_n) = 0$ , Sidottu reunaehto,

joista viimeinen ehto (e) poikkeaa edellisen tehtävän vapaasta reunasta. Tässä tapauksessa yhtälöryhmä  $Ac = b$  saadaan muotoon (johdetaan vastaavasti, kuten edellisessä tehtävässä)

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & 2h_3 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(x_0) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) - \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) \\ 3f'(x_n) - \frac{3}{h_3}(a_4 - a_3) \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3/2 \\ -9/2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jonka ratkaisuna

$$c = (-0.2008, 0.4015, 0.3958, -1.2348, 2.1174).$$

Kertoimet  $\{b_j\}_{j=0}^3$  saadaan, kuten edellä suoralla sijoituksella yhtälöön

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}),$$

$$b = (-1.0000, -0.7992, 0.7955, -0.8826).$$

Vastaavasti kertoimet  $\{d_j\}_{j=0}^3$  ratkeavat yhtälöstä

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j,$$

$$d = (0.2008, -0.0009, -0.2718, 1.1174).$$

Muodostetaan lopuksi polynomi

$$S(x) = \begin{cases} 0.8030 + 0.6061x + 1.004x^2 + 0.2008x^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 0.6013 + 0.0009x + 0.3987x^2 - 0.0009x^3, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0.8722 - 0.8116x + 1.211x^2 - 0.2718x^3, & 1 \leq x \leq 3 \\ -36.63 + 36.70x - 11.29x^2 + 1.117x^3, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

