

Ratkaisu

Puolisuunnikassääntö virhetermeineen on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\xi),$$

missä $h = (b - a)/2$ ja $\xi \in]x_0, x_1[$.

Nyt integroitavana on funktio $f(x) = x \ln(x + 1)$ välillä $[1, 5]$. Siis

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx &= \frac{4}{2}[f(1) + f(5)] \\ &= 2 \ln 2 + 10 \ln 6 . \\ &\approx 19.304\end{aligned}$$

Suoritetaan virhearvio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}, \\ f''(x) &= \frac{x+2}{(x+1)^2}, \\ f'''(x) &= -\frac{x+3}{(x+1)^3}.\end{aligned}$$

Selvästi $f'''(x) = -\frac{x+3}{(x+1)^3} < 0$, kun $1 \leq x \leq 5$. Siis $f''(x)$ on aidosti vähenevä funktio välillä $[1, 5]$ ja approksimaatiovirheen ylärajalle pätee

$$|\text{Virhe}| < \frac{h^3}{12} \max |f''(\xi)| = \frac{4^3}{12} |f''(1)| = 4.0.$$

Integraalin tarkka arvo on

$$\int_1^5 x \ln(x + 1)dx = 12(\ln 2 + \ln 3) - 4 \approx 17.501.$$

Todellinen approksimaatiovirhe on siis $|\text{Virhe}|_{\text{Tod.}} = 1.803$. Ohessa integraalin approksimaatio puolisuunnikasmenetelmällä graafisesti kuvattuna.

