

Ratkaisu

Simpsonin sääntö virhetermeineen on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + f(b)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi),$$

missä $h = (b - a)/2$ ja $\xi \in]a, b[$.

Nyt integroitavana on funktio $f(x) = x \ln(x + 1)$ välillä $[1, 5]$. Siis

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx &= \frac{2}{3}[f(1) + 4f(3) + f(5)] \\ &= \frac{2}{3}[\ln 2 + 12 \ln 4 + 5 \ln 6] \\ &\approx 17.525\end{aligned}$$

Suoritetaan virhearvio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}, \\ f''(x) &= \frac{x+2}{(x+1)^2}, \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{x+3}{(x+1)^3}, \\ f^{(4)}(x) &= \frac{2(x+4)}{(x+1)^4}, \\ f^{(5)}(x) &= -\frac{6(x+5)}{(x+1)^5}.\end{aligned}$$

Selvästi $f^{(5)}(x) = -\frac{6(x+5)}{(x+1)^5} < 0$, kun $1 \leq x \leq 5$. Siis $f^{(4)}(x)$ on aidosti vähenevä funktio välillä $[1, 5]$ ja approksimaativirheen ylärajalle pätee

$$|\text{Virhe}| < \frac{h^5}{90} \max |f^{(4)}(\xi)| = \frac{2^5}{90} |f^{(4)}(1)| = \frac{2}{9} \approx 0.22.$$

Integraalin tarkka arvo on

$$\int_1^5 x \ln(x+1)dx = 12(\ln 2 + \ln 3) - 4 \approx 17.501.$$

Todellinen approksimaativirhe on siis $|\text{Virhe}|_{\text{Tod.}} = 0.024$. Ohessa integraalin approksimaatio Simpsonin menetelmällä graafisesti kuvattuna. Kuten havaitaan ei merkittäviä eroja ole nyt nähtävissä (vrt. edellinen tehtävä).

Simpsonin menetelmä / 2 osaväliä

