

Ratkaisu

Yleistetty puolisuunnikassääntö virhetermeineen on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi),$$

missä $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ kaikilla $j = 0, 1, \dots, n$ ja $\xi \in]a, b[$.

Integroitavana on funktio $f(x) = x \ln(x+1)$ välillä $[1, 5]$, jonka integraalin approksimoimiseen käytetään viittä funktion arvoa. Siis $n = 4$ ja $h = (b-a)/4 = 1.0$. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_1^5 f(x)dx &= \frac{1}{2} [f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + f(5)] \\ &= \frac{1}{2} [\ln 2 + 4 \ln 3 + 6 \ln 4 + 8 \ln 5 + 5 \ln 6] \\ &\approx 17.620 \end{aligned}$$

Suoritetaan virhearvio.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x+2}{(x+1)^2}, \\ f'''(x) &= -\frac{x+3}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

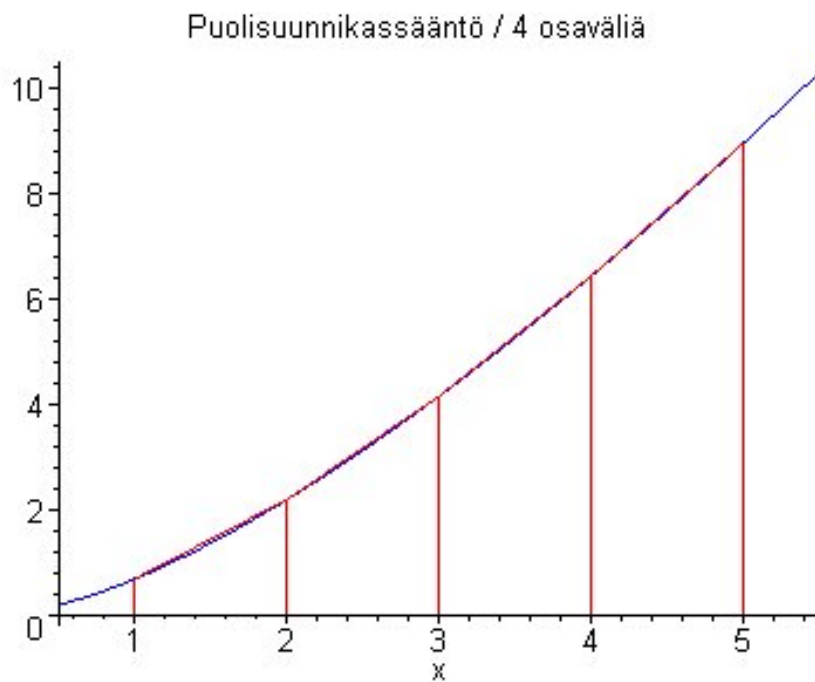
Selvästi $f'''(x) = -\frac{x+3}{(x+1)^3} < 0$, kun $1 \leq x \leq 5$. Siis $f''(x)$ on aidosti vähenevä funktio välillä $[1, 5]$ ja approksimaativirheen ylärajalle pätee

$$|\text{Virhe}| < \frac{b-a}{12} h^2 \max |f''(\xi)| = \frac{4}{12} 1^2 |f''(1)| = \frac{1}{4}.$$

Integraalin tarkka arvo on

$$\int_1^5 x \ln(x+1) dx = 12(\ln 2 + \ln 3) - 4 \approx 17.501.$$

Todellinen approksimaativirhe on siis $|\text{Virhe}|_{\text{Tod.}} = 0.119$. Ohessa integraalin approksimaatio puolisuunnikasmallilla graafisesti kuvattuna neljällä osavälillä.



Vaatus: $|\text{Virhe}| < 10^{-6}$. Tarvittavien osavälien lukumäärä saadaan ratkaisemalla n epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
 & \frac{b-a}{12} h^2 \max |f''(\xi)| < 10^{-6} \\
 \Leftrightarrow & \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''(\xi)| < 10^{-6} \\
 \Leftrightarrow & n > \sqrt{\frac{(b-a)^3 \max |f''(\xi)|}{12 \cdot 10^{-6}}} \\
 \Leftrightarrow & n > \sqrt{\frac{(5-1)^3 \max |f''(1)|}{12 \cdot 10^{-6}}} \\
 \Leftrightarrow & n > 2000.
 \end{aligned}$$

Siis puolisuunnikasmenetelmää on sovellettava vähintään 2001 osavälillä (tarvitaan vähintään 2002 funktion arvoa) halutun tarkkuuden $|\text{Virhe}| < 10^{-6}$ saavuttamiseksi.