

Ratkaisu

Yleistetty Simpsonin sääntö virhetermeineen on muotoa

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi),$$

missä $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ kaikilla $j = 0, 1, \dots, n$ ja $\xi \in]a, b[$.

Integroitavana on funktio $f(x) = x \ln(x+1)$ välillä $[1, 5]$, jonka integraalin approksimoimiseen käytetään viittä funktion arvoa. Siis $n = 4$ ja $h = (b-a)/4 = 1.0$. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_1^5 f(x)dx &= \frac{1}{3} [f(1) + 4f(2) + 2f(3) + 4f(4) + f(5)] \\ &= \frac{1}{3} [\ln 2 + 8 \ln 3 + 6 \ln 4 + 16 \ln 5 + 5 \ln 6] \\ &\approx 17.5032 \end{aligned}$$

Suoritetaan virhearvio.

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{2(x+4)}{(x+1)^4}, \\ f^{(5)}(x) &= -\frac{6(x+5)}{(x+1)^5}. \end{aligned}$$

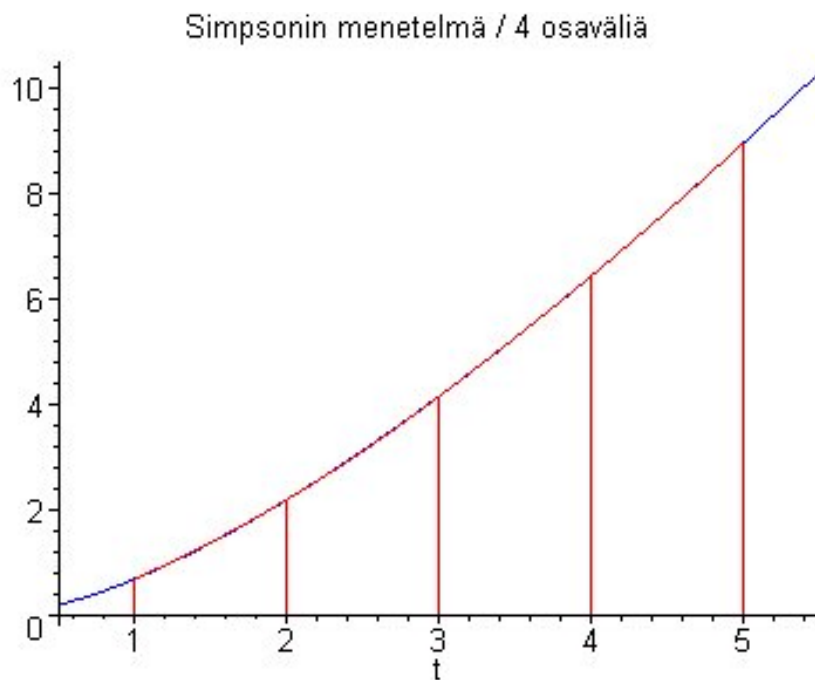
Selvästi $f^{(5)}(x) = -\frac{6(x+5)}{(x+1)^5} < 0$, kun $1 \leq x \leq 5$. Siis $f^{(4)}(x)$ on aidosti vähenevä funktio välillä $[1, 5]$ ja approksimaativirheen ylärajalle pätee

$$|\text{Virhe}| < \frac{b-a}{180} h^4 \max |f^{(4)}(\xi)| = \frac{4}{180} 1^4 |f^{(4)}(1)| = \frac{1}{72} \approx 0.014.$$

Integraalin tarkka arvo on

$$\int_1^5 x \ln(x+1)dx = 12(\ln 2 + \ln 3) - 4 \approx 17.501.$$

Todellinen approksimaativirhe on siis $|\text{Virhe}|_{\text{Tod.}} = 0.0021$. Ohessa integraalin approksimaatio Simpsonin menetelmällä graafisesti kuvattuna neljällä osavälillä.



Vaatus: $|\text{Virhe}| < 10^{-6}$. Tarvittavien osavälien lukumäärä saadaan ratkaisemalla n epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
 & \frac{b-a}{180} h^4 \max |f^{(4)}(\xi)| < 10^{-6} \\
 \Leftrightarrow & \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max |f^{(4)}(\xi)| < 10^{-6} \\
 \Leftrightarrow & n > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 \max |f^{(4)}(\xi)|}{180 \cdot 10^{-6}}} \\
 \Leftrightarrow & n > \sqrt[4]{\frac{(5-1)^5 \max |f^{(4)}(1)|}{180 \cdot 10^{-6}}} \\
 \Leftrightarrow & n > 43.
 \end{aligned}$$

Oltava n parillinen. Siis Simpsonin sääntöä on sovellettava vähintään 44 osavälillä (tarvitaan vähintään 45 funktion arvoa) halutun tarkkuuden $|\text{Virhe}| < 10^{-6}$ saavuttamiseksi.