

## Ratkaisu

Muodostetaan ensimmäiset approksimaatiot yleistetyllä puolisuunnikassäännöllä  $k = 1, 2, \dots, n$  osavälillä

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k) + f(b) \right], \quad (1)$$

missä  $h_k = (b - a)/2^{k-1}$  on jakoa  $k$  vastaavan osavälin pituus. Yhtälö (1) on Rombergin integroinnin yhteydessä tapana esittää kuitenkin seuraavin merkinnöin

$$R_{k,1} = \frac{1}{2} \left[ R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_{k-1}) \right],$$

missä  $k = 2, 3, \dots, n$ . Arvolla  $k = 1$  sovelletaan puolisuunnikassääntöä (1) ai-noastaan yhdellä osavälillä. Esimerkkitehtävän

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{5 + 3\cos(x)} dx$$

tapauksessa

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= h_1/2[f(a) + f(b)] = (\pi/2 - 0)/2[f(0) + f(\pi/2)] = 0.098175, \\ R_{2,1} &= 1/2[R_{1,1} + h_1 f(a + h_2)] = 1/2[0.098175 + \pi/2 f(0 + \pi/4)] = 0.127030, \\ R_{3,1} &= 1/2[R_{2,1} + h_2(f(a + h_3) + f(a + 3h_3))] \\ &= 1/2[0.127030 + \pi/4(f(\pi/8) + f(3\pi/8))] = 0.134663. \end{aligned}$$

Kiihdytetään suppenemista Richardsonin ekstrapolaatiolla

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \text{ missä } k = 2, 3, \dots, n \text{ ja } j = 2, \dots, k.$$

Saadaan

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{4^{2-1} - 1} = 0.136706,$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{4^{2-1} - 1} = 0.137193,$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{4^{3-1} - 1} = 0.137226.$$

Richardsonin ekstrapolaatiomenetelmän approksimaatiot on tapana esittää tauluk-komuodossa

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= 0.098175 \\ R_{2,1} &= 0.127030 & R_{2,2} &= 0.136706 \\ R_{3,1} &= 0.134663 & R_{3,2} &= 0.137193 & R_{3,3} &= 0.137226 \end{aligned}$$

Integraalin tarkka arvo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{5 + 3\cos(x)} dx = -\frac{5}{6} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\pi \approx 0.13722576,$$

joten neljän desimaalin tarkkuus saavutetaan arvolla  $R_{3,3}$ .