

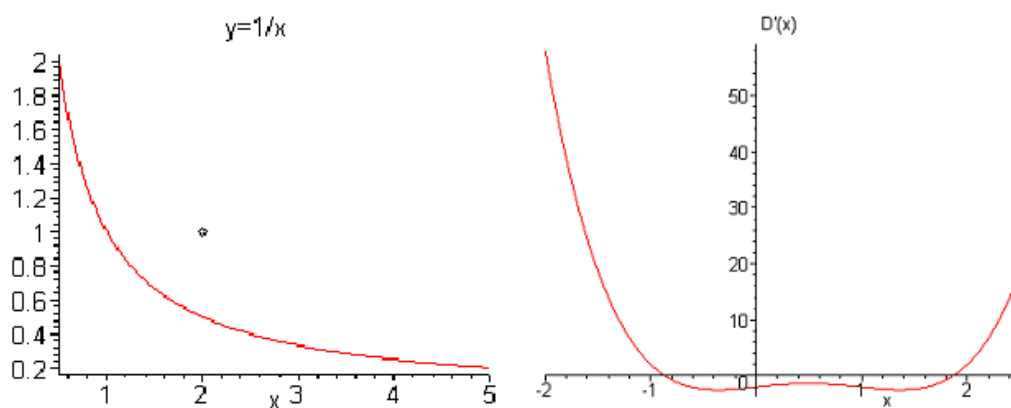
Ratkaisu

Pisteen $(2, 1)$ etäisyyden neliö käyrästä $y = 1/x$ on muotoa

$$\begin{aligned} D &= (2-x)^2 + (1-y)^2 = (2-x)^2 + (1-1/x)^2 \\ &= x^2 - 4x + 5 + 1/x^2 - 2/x. \end{aligned}$$

Pisteen $(2, 1)$ ja käyrän $y = 1/x$ lyhin etäisyys löydetään derivaatan $D'(x)$ nollakohdista.

$$\begin{aligned} D'(x) &= -4 + 2x + 2/x^2 - 2/x^3 \\ &= 2x^4 - 4x^3 + 2x - 2. \end{aligned}$$



Derivaattafunktion kuvaajasta nähdään, että välttämättä etäisyysfunktion D minimoiva nollakohta on välillä $(1, 2)$. Valitaan siis alkuarvaukseksi $x_0 = 2$ ja iteroidaan ratkaisuja Newtonin kaavan mukaan

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{D'(x_n)}{D''(x_n)} \\ &= x_n - \frac{2x_n^4 - 4x_n^3 + 2x_n - 2}{8x_n^3 - 12x_n^2 + 2}. \end{aligned}$$

Saadaan

x_n	$D'(x_n)$
2.0000	2.0000
1.8888	0.2801
1.8675	0.0091
1.8667	0.0000
1.8667	

3. iteraatio antaa ratkaisun $x = 1.8667$ neljän desimaalin tarkkuudella. (Tarkka ratkaisu $1/2 + 1/2\sqrt{3 + 2\sqrt{5}} \approx 1.866760399$.)