Numeerisen analyysin harjoitustyö

Sanomme, että lukujono $\{y_n\}$ on *jaksollinen*, jos on olemassa $p > 0$ siten, että $y_{n+p} = y_n$ kaikille $n \geq 0$. Tällöin jonolla $\{y_n\}$ on *jaksona* p. Olkoon a annettu reaaliluku ja määritellään

$$F_a(x) = ax(1-x), \qquad x_0 = \frac{1}{2}$$

ja

$$x_{n+1} = F_a(x_n), \qquad \text{kun} \quad n \geq 0. \tag{1}$$

1990-luvulla todistetun syvällisen lauseen nojalla jokaisella välin $[3,4]$ avoimella osavälillä on piste a siten, että ehdon (1) määrittelemä jono $\{x_n\}$ suppenee kohti jotakin jaksollista jonoa $\{y_n\}$ siinä mielessä, että

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Toisaalta väliltä $[3,4]$ löytyy ääretön määrä a:n arvoja, joilla näin ei tapahdu. Tällaisia a:n arvoja vastaavien "kaoottisten" jonojen esiintymistodennäköisyys kasvaa lähestyttäessä arvoa $n = 4$.

Tehtävä

Etsi kokeilemalla kolme a:n arvoa ja niitä vastaavat yhtälön (1) toteuttavat jaksolliset jonot siten, että ko. jonoilla on jaksona erisuuret luvut $p \geq 2$ ja $x_{n+p} = x_n$ neljän desimaalin tarkkuudella.

Ohje

Tarvittavien jonojen generointiin voi käyttää kurssin kotisivulta löytyvää työarkkia kiintop.mws. Koska jonojen suppeneminen saattaa olla hidasta, kannattaa neljän desimaalin tarkkuuden saavuttamiseksi tarvittaessa korvata lähtöpiste x_0 jollakin muotoa x_n, x_{n+p}, $x_{n+2p} \ldots$ olevien pisteiden (ei välttämättä aritmeettisella) keskiarvolla. Virheanalyysiä ei tarvita, tietokoneen tuloste riittää. Löysitkö "kaoottisen" jonon?

Työstä kirjoitetaan lyhyt selostus, johon on liitettävä käytetyt tietokoneohjelmat ja niiden tulosteet. Hyväksytystä työstä saa 5 laskuharjoituspistettä, jos selostus on palautettu viimeistään 12.12.

Kirjallisuutta: Strang, Introduction to Applied Mathematics, sivut 506-510.