Signaalien matematiikkaa, syksy 2001

Harjoitus 4

Harjoitukset salissa M352.

1. Diracin δ määritellään seuraavasti. Olkoon f jatkuva ja asetetaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_n(t)dt$$

missä funktiojono g_n toteuttaa seuraavat ehdot:

(a($g_n(t) \geq 0$ kaikilla t ja n

(b($\int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)dt = 1$ kaikilla n

(c($\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$ kaikilla $t \neq 0$

Tarkista, että $g_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2t^2)$ toteuttaa vaaditut ehdot.

2. Mikä on funktion $f(t) = 2\cos(3\pi t) + 6\sin(5\pi t)$ Fourier-muunnos? Mikä on funktion $\hat{g}(\omega) = 2\delta(4\omega - 3) + 7\delta(5\omega + 2)$ käänteismuunnos?

3. Tiedetään että

$$f(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{\pi^2 t^2} \qquad \longleftrightarrow \qquad \hat{f}(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega| \ , & |\omega| \leq 1 \\ 0 \ , & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Tutki spektrin laskostumista näytteenotossa seuraavasti. Valitse satunnaisluvut r_1 ja r_2 siten, että $|r_i| < 10$. Ota f:stä näytteitä väliltä $[-1000 + r_1, 1000 + r_2]$. Laske DFT:n avulla approksimaatio $\hat{f}$:lle eri näytteenottoväleillä b. Piirrä kuvia. Kuinka pieni b:n pitää olla, jotta saisit $\hat{f}$:n tarkasti? Miksi on hyödyllistä käyttää satunnaislukuja?

4. Tiedetään että

$$f(t) = e^{-|t|} \qquad \longleftrightarrow \qquad \hat{f}(\omega) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\omega^2}$$

Tutki laskostumista kuten edellisessä tehtävässä. Nyt ei ole mahdollista saada muunnosta $\hat{f}$ tarkasti. Ota näytteitä väliltä $[-a_1, a_2]$, näyttenottoväli b. Halutaan, että virhe DFT:n avulla lasketussa muunnoksessa on $\leq 10^{-4}$, kun $|\omega| \leq 80$. Miten valitset parametrit a_1, a_2 ja b?