Signaalien matematiikkaa, syksy 2001

Harjoitus 5

Harjoitukset salissa M352.

1. Olkoon $f(t) = 0$ kun $|t| > 5$. Kuinka monta näytettä vähintään tarvitaan, jos halutaan DFT:llä approksimoida f:n Fourier-muunnosta välillä $|\omega| \leq 100$? Kuinka suuri on näytteenottotaajuus tällöin?

2. Olkoon
$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 < t < 1 \\ -1\,, & 1 < t < 2 \end{cases}$$
   - Miksi f:n Fourier-kertoimet ovat puhtaasti imaginaarisia?
   - laske käsin f:n 8-pisteen DFT:n avulla approksimaatiot Fourier-kertoimille. Ovatko approksimaatiot puhtaasti imaginaarisia?
   - Laske approksimaatiot Matlabilla isommalla N:n arvolla. Ovatko approksimaatiot nyt puhtaasti imaginaarisia?

3. Olkoon
$$g(t) = \begin{cases} \exp\big(1/(t^2-1)\big)\,, & |t| < 1 \\ 0\,, & |t| \geq 1 \end{cases}$$
Voidaan osoittaa, että g on äärettömän monta kertaa jatkuvasti derivoituva myös kohdissa $t = \pm 1$ ja että $g^{(k)}(\pm 1) = 0$ kaikilla k. g:n avulla signaali/funktio voidaan "sileästi katkaista". Tarkastellaan seuraavia funktioita annetuilla väleillä:
$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1 - e^t\,, \quad 0 < t < 1 \\ f_2(t) &= -6t^4 + 60t^3 - 162t^2 + 108t\,, \quad 0 < t < 3 \\ f_3(t) &= \big(3t^4 - 7t^2 + 5t\big)g(t/3 - 1)\,, \quad 0 < t < 6 \end{aligned}$$
Piirrä kuvat.
   (a) Kuinka nopeasti funktioitten Fourier-kertoimet menevät kohti nollaa, kun $|n| \to \infty$?
   (b) Kuinka hyvän approksimaation saat kertoimille DFT:n avulla?

   Testaa Matlabilla pitävätkö (a) ja (b) - kohtien teoreettiset tulokset paikkaansa. Muista valita näytevektori "oikein"! Toimi näin:
   - Valitse ensin jokin iso $N = 2^m$ ja laske tätä vastaava DFT. Pidetään tästä saatuja arvoja "tarkkana" ratkaisuna. Laske sitten kertoimet arvoilla $N/8$, $N/16$ jne ja vertaa "tarkkaan" ratkaisuun.