Signaalien matematiikkaa, syksy 2001

Harjoitus 6

Harjoitukset salissa M352.

Huom Harjoitukset perjantaina 19. 10 klo 12 - 14.

1. Olkoon f jokin annettu funktio ja $g(t) = \exp(i\,2\pi t)$. Laske $f * g$.

2. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} 1\ , & t > 0 \\ 0\ , & t < 0 \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} t-2, & t > 2 \\ 0\ , & t < 2 \end{cases}$$

Laske $f * g$. Huomaa, että f ja g eivät ole integroituvia funktioita, mutta konvoluutio on hyvin määritelty. Mikä on y:n kantaja, $\mathrm{supp}(y)$? Onko y jatkuva? Jatkuvasti derivoituva?

3. Olkoon

$$f(t) = \begin{cases} 1-t\ , & -2 < t < 1 \\ 0\ , & muulloin \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} t^2, & -1 < t < 3 \\ 0\ , & muulloin \end{cases}$$

- Laske konvoluutio $y(t) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$. Mikä on y:n kantaja, $\mathrm{supp}(y)$? Onko y jatkuva? Jatkuvasti derivoituva?
- Jatketaan f ja g jaksollisesti välin $[0, 2]$ ulkopuolelle, ja merkitään näin saatuja funktioita f_1 ja g_1. Laske jaksollinen konvoluutio $y_1(t) = f_1 * g_1 = \int_0^2 f_1(s)g_1(t-s)ds$. Onko y_1 jatkuva? Jatkuvasti derivoituva?

4. Olkoon

$$g(t) = \begin{cases} \exp\big(1/(t^2-1)\big)\ , & |t| < 1 \\ 0\ , & |t| \geq 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad c = \int_{-1}^{1} g(t)dt$$

Vakion c saa laskettua DFT:n avulla. Tulos on vieläpä erittäin lähellä oikeaa. Miksi?

Olkoon edelleen $a(t) = g(t)/c$, $a_n(t) = na(nt)$ ja

$$f(t) = \begin{cases} 1-t\ , & -2 < t < 1 \\ \sin(14/t)\ , & 3 < t < 5 \\ \exp(1/(2+\cos(5t)))\ , & -7 < t < -4 \\ 0\ , & muulloin \end{cases}$$

Halutaan f:lle sileä approksimaatio $f \approx f_n = f * a_n$. Ohje:

- valitse jokin n ja laske DFT:n avulla approksimaatiot muunnoksille $\hat{f}$ ja $\hat{a}_n$. Ota huomioon supp(f_n), kun valitset näytevektoria.
- koska $\hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{a}_n(\omega)$, niin edellisen kohdan perusteella saat approksimaation muunnokselle $\hat{f}_n(\omega)$.
- nyt saat siis käänteis DFT:llä approksimaation f_n:lle.
- vertaa saamaasi tulosta funktioon f. Mikä olisi "hyvä" n:n arvo?

5. Edellinen tehtävä voidaan laskea myös komennon `conv` avulla. Tarkista, että saat "saman" tuloksen kuin edellä. Siis tulos ei ole täsmälleen sama koska DFT:n laskennassa tulee virhettä. Mutta ottamalla riittävästi näytepisteitä virhe saadaan niin pieneksi kuin halutaan. Totea kuitenkin komentojen `tic` ja `toc` avulla, että edellisen tehtävän tapa on paljon nopeampi.