Signaalien matematiikkaa, syksy 2001

Harjoitukset salissa M352.

Harjoitus 8

1. Tarkastellaan seuraavia funktioita annetuilla väleillä:

   $$f_1(t) = \cos(2t^2+1) - t^3 + 2t \qquad -1.7 \le t \le 1.8$$
   $$f_2(t) = 5\exp\big(1/((t-1/2)^4+1)\big) + (t-2)^2 + \sin(12t) \qquad -0.5 \le t \le 2.6$$

   - Muodosta molemmille funktioille interpoloiva funktio DFT:n avulla. Valitse siis tasavälein 10 - 20 pistettä, joissa interpoloivan funktion ja annetun funktion arvojen pitäisi olla samat.
   - Approksimoi annettuja funktioita Fourier-sarjan osasummien avulla. Kuinka monta termiä summaan tarvitaan, jos halutaan, että virhe on pienempi kuin 10^{-3}? Entä pienempi kuin 10^{-5}?
   - Tarkastele tapausta, jossa interpoloivassa funktiossa ja Fourier-sarjan osasummassa on yhtä paljon termejä. Kumpi antaa paremman approksimaation?

   Molemmissa tapauksissa poista ensin “lineaarinen trendi“.

2. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

   $$-u''(t) = f(t) = f_2(t) - 11.62816987 \qquad -0.5 < t < 2.6$$

   Halutaan tälle jaksollisia ratkaisuja, eli vaaditaan, että $u(-0.5) = u(2.6)$ ja $u'(-0.5) = u'(2.6)$. Jotta tämmöinen ratkaisu olisi olemassa, pitää päteä $\int_{-0.5}^{2.6} f(t)dt = 0$. Tarkista DFT:n avulla, että ehto on (laskentatarkkuuden rajoissa) voimassa.

   Etsitään sellaista ratkaisua, jolle $\int_{-0.5}^{2.6} u(t)dt = 0$. Ratkaise tehtävä kahdella tavalla.

   - Muodosta u:lle Fourier-osasummia. Kokeile eri tapauksia. Kuinka monta termiä tuntuisi riittävän?

- Ratkaise tehtävä differenssiyhtälön kautta. Valitaan siis $b = 3.1/N$, ja muodostetaan yhtälöt

  $$-u_{k+1} + 2u_k - u_{k-1} = b^2 f_k \qquad 0 \leq k < N$$

  Tässä siis $u_k \approx u(kb - 0.5)$ ja $f_k = f(kb - 0.5)$. Olkoon edelleen $u = (u_0, \ldots, u_{N-1})$, ja vastaavasti $f = (f_0, \ldots, f_{N-1})$. Luennoilla johdettiin u:n ja f:n DFT:n välille seuraava yhteys:

  $$U_k = \frac{b^2}{4\pi^2 \sin^2(\pi k/N)} F_k$$

  Ratkaise difyhtälö tämän avulla eri N:n arvoilla. Mikä N:n arvo tuntuisi olevan "riittävän" iso?

Kumpi ratkaisumenetelmä tuntuu paremmalta? Miksi?