

Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 10

1. Henkilö hapuilee avainippuaan ulko-ovella. Nipussa on n avainta, joista yksi sopii oveen. Olkoon X sen kerran järjestysluku, jolloin ovi aukeaa. Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathbf{E}(X)$ olettaen, että henkilö valitsee avaimen umpimähkään (valinnat riippumattomia) ja

- (a) muistaa mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt,
- (b) ei muista mitä avaimia hän on turhaan yrittänyt.

Ohje kohtaan (b): Selvitä ensin $X - 1$:n jakauma X :n pistetodennäköisyysfunktion perusteella. (Diskreetit jakaumat).

2. Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Laske

- (a) $\mathbf{E}(2X + 1)$
- (b) $\mathbf{E}(2X^2 + 1)$

3. Elektronisen putken käyttöikä tunneissa on satunnaismuuttuja X , jonka jakauma on

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Laske käyttöiän odotusarvo $\mathbf{E}(X)$.

4. Laske $\mathbf{E}(X)$ ja $\text{Var}(X)$, kun satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = C e^{-|x|}, \text{ kun } x \in \mathbb{R}.$$

5. Reilua noppaa heitetään 10 kertaa. Laske silmälukujen summan odotusarvo.
6. Vertaile Tšebyševin epäyhtälön

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

antamaa arviota todennäköisyyden tarkkaan arvoon tapauksissa $k = 2$ ja 3 , kun satunnaismuuttujan X jakauma on

- (a) $\text{Gas}(0, 1)$
- (b) $\text{Exp}(\lambda)$
- (c) $N(\mu, \sigma^2)$.

7. Olkoon satunnaismuuttuja X jatkuva positiivinen muistiton satunnaismuuttuja, joka kuvaa laitteen elinikää. Eliniän odotusarvo on 6. Laske $\mathbf{E}(e^{-X})$?