

Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 11

1. Osoita induktiolla, että

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Anna esimerkki satunnaismuuttujasta, jolla ei ole varianssia.

3. Olkoot A ja B todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tapahtumia. Osoita, että

(a) $1_{A^c} = 1 - 1_A$

(b) $\min(1_A, 1_B) = 1_{A \cap B} = 1_A 1_B$

(c) $\max(1_A, 1_B) = 1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$.

4. Laske satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi, kun satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & , \text{ kun } -1 < x < 1, \\ 0 & , \text{ muulloin.} \end{cases}$$

5. Olkoon $X \sim \text{Tas}(0, 1)$. Laske

(a) $\mathbf{P}\{|X| > \frac{1}{2}\}$

(b) $\mathbf{P}\{\sin(\frac{\pi X}{2}) > \frac{1}{3}\}$

6. Olkoon X_1, \dots, X_n ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, johda satunnaismuuttujan $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ kertymäfunktio.

7. Valitaan satunnaisluku X väliltä $[0, 1]$ ja oletetaan, että $X \sim \text{Tas}(0, 1)$. Laske todennäköisyys, että

(a) Valitun luvun \sqrt{X} ensimmäinen desimaali on 3

(b) luvun X^2 ensimmäinen desimaali on 3