

## Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 12

1. Määritä satunnaismuuttujan  $X - Y$  tiheysfunktio, kun  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia ja  $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

**Vinkkejä:** Merkitse  $V = -Y$ . Tällöin  $\mathbf{P}\{V < 0\} = 1$ . Laske satunnaismuuttujan  $V$  kertymäfunktio ja siitä  $V$ :n tiheysfunktio. Konvoluution avulla saat erotuksen  $Z$  tiheysfunktion. Tarkastele konvoluutiokaavaa käyttäessäsi erikseen tilanteet, missä  $z < 0$  (eli  $x < z$ ) ja  $z > 0$ .

2. Olkoon  $X \sim \text{Tas}(0, 1)$ . Laske satunnaismuuttujan  $|X|$  tiheysfunktio.

**Vinkki:** Laskemalla ensin kertymäfunktion saat sen avulla tiheysfunktion.

3. Henkilöt  $A$  ja  $B$  ovat päättäneet tavata keskuskujalla (paikallisbussien pääte pysäkki). He lähtevät samaan aikaan busseilla pääte pysäkeiltä,  $A$  Noljakasta ja  $B$  Rantakylästä. Mikä on todennäköisyys, että

(a) ensin saapuva ei joudu odottamaan toista 10 minuuttia kauempaa,

**Vinkki:** Tarkoittaa siis, että olisi laskettava  $\mathbf{P}\{|X - Y| \leq 10\}$ . Käyttäen Lauseita 4.7.14 ja 4.7.15 saadaan jakauma, jota erotus  $X - Y$  noudattaa.

(b)  $A$  saapuu ensin,

jos bussien kulkuajat ovat riippumattomia satunnaismuuttujia ja Noljakan bussin kulku aika noudattaa jakaumaa  $N(25, 7^2)$  ja Rantakylän  $N(30, 9^2)$ .

4. Suorakulmion sivujen todelliset pituudet ovat  $a$  ja  $b$ . Mittauksessa tapahtuu virhe siten, että mittaustulokset ovat

$$a + X \text{ ja } b + Y,$$

missä  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia ja noudattavat  $\text{Tas}(-1, 1)$ -jakaumaa ja  $a, b > 1$ . Olkoon  $Z$  mittaustulosten aiheuttama pinta-ala virhe. Laske  $\mathbf{E}(Z)$  ja  $\text{Var}(Z)$ .

**Vinkki:** Jos  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia, niin myös satunnaismuuttujat  $X^2$  ja  $Y^2$  ovat riippumattomia, satunnaismuuttujat  $X^2$  ja  $Y$  ovat riippumattomia ja satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y^2$  ovat riippumattomia.

5. Olkoot  $X$  ja  $Y$  satunnaismuuttujia, joilla on varianssit. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä

(a)  $Cov(X, Y) = 0$

(b)  $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$

(c)  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

**Vinkki:**  $\mathbf{E}(X - \mu_x)(Y - \mu_y) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E}(X - \mu_x)^2 + \mathbf{E}(Y - \mu_y)^2 + 2\mathbf{E}(X - \mu_x)(Y - \mu_y) = \mathbf{E}(X - \mu_x)^2 + \mathbf{E}(Y - \mu_y)^2.$

6. Osoita käyttäen Määritelmää 4.9.1, että jos  $Y = aX + b$ , niin  $Corr(X, Y) = 1$  tai  $Corr(X, Y) = -1$ .

**Vinkki:** Laske korrelaatio  $corr(X, aX + b)$ .

7. Olkoon  $X_1$  ja  $X_2$  riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, 2$ . Olkoon lisäksi  $Y = X_1 + X_2$  ja  $Z = X_1 - X_2$ . Laske

(a)  $Corr(X_1, Y)$ ,

(b)  $Corr(X_2, Z)$ ,

(c)  $Corr(Y, Z)$ .