Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 13

1. Olkoot $X_1, \ldots, X_{20}$ riippumattomia Poisson jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on 1. Arvioi todennäköisyyttä

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{20} X_i > 15\right\}$$

   (a) Markovin epäyhtälön avulla ja

   (b) käyttäen keskeistä raja-arvolausetta (L.4.13.1)

2. Oletetaan, että matematiikan kokeissa perusasteen oppilaan pistemäärä prosenteissa maksimista on satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on 75 ja varianssi 25. Laske Tšebyševin epäyhtälön ja keskeisen raja-arvolauseen (tai Huomautuksen 4.13.2) avulla arviot, kuinka monen opiskelijan tulee osallistua kokeeseen, että luokan keskiarvo poikkeaa vähintään todennäköisyydellä 0.9 korkeintaan viidellä arvosta 75.

3. Tasoon piirretään kolmio, jonka kärkinä ovat origo sekä x- ja y-akselilta satunnaisesti valitut pisteet X ja Y, jotka ovat riippumattomia ja noudattavat $N(0,1)$ jakaumaa. Laske kolmion pinta-alan odotusarvo.

4. Lampun kestoajan odotusarvo on $\frac{3}{4}$ ja varianssi on $\frac{1}{4}$ (yksikkönä vuosi). Kun lamppu on palanut se vaihdetaan heti uuteen, lamput ovat toisistaan riippumattomia. Kuinka monta lamppua olisi varastossa oltava, että ne riittäisivät kuudeksi vuodeksi vähintään todennäköisyydellä 0.9?

5. SIIRTYY HARJOITUKSIIN 14! Satunnaismuuttujalla X on tngf G_X. Johda satunnaismuuttujien $X+1$ ja $2X$ todennäköisyysgeneroivat funktiot.

6. Omenoita pakataan laatikkoon. Yhden omenan painon odotusarvo on 200g ja hajonta 20g. pakkaaminen lopetetaan heti, kun omenoiden yhteispaino on vähintään 10 kg. Määritä $\mathbf{P}\{N \leq 49\}$, missä N on laatikkoon sijoitetuiksi tulleiden omenoiden lukumäärä.

7. SIIRTYY HARJOITUKSIIN 14! Olkoon X $\mathbb{N}$-arvoinen satunnaismuuttuja ja G sen tngf.

   (a) Mitä ovat $G(0)$ ja $G(1)$?

   (b) Lausu G:n avulla todennäköisyys, että satunnaismuuttuja X saa parillisen arvon.