# Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 14

1. Satunnaismuuttujalla $X$ on tngf $G_X$. Johda satunnaismuuttujien $X+1$ ja $2X$ todennäköisyysgeneroivat funktiot.

2. Olkoon $X$ $\mathbb{N}$-arvoinen satunnaismuuttuja ja $G$ sen tngf.

   **(a)** Mitä ovat $G(0)$ ja $G(1)$?

   **(b)** Lausu $G$:n avulla todennäköisyys, että satunnaismuuttuja $X$ saa parillisen arvon.

3. Sadalle lapselle järjestettyyn kevätjuhlaan on varattu 52 pulloa punaista limsaa ja 52 pulloa keltaista limsaa. Arvioi keskeisen raja-arvolauseen nojalla todennäköisyyttä, että kummankaan värinen limsa ei lopu kesken, kun kukin lapsi valitsee limsavärinsä (punainen tai keltainen) muista riippumatta ja umpimähkään (kukin lapsi saa yhden limsapullon). (Vinkki: todennäköisyys on noin 0.38 jatkuvuuskorjausta apuna käyttäen.)

4. Todista Lause 4.15.2 Vinkki: ennen kohdan (b) todistamista, todista (a) ja (c), niin voit käyttää niitä apuna.

5. Olkoon $X \sim Exp(\lambda)$. Laske satunnaismuuttujan $X$ odotusarvo ja varianssi käyttäen momentit generoivaa funktiota.

6. Jos $X \sim Poisson(\lambda)$, niin mikä on satunnaismuuttujan $X$ momentit generoiva funktio. Laske tämän avulla

   **(a)** $\mathbf{E}(X)$,

   **(b)** $Var(X)$.

7. Osoita momentit generoivan funktion avulla, että jos satunnaismuuttujat $X$ ja $Y$ ovat riippumattomia ja $X \sim Poisson(\lambda_1)$ ja $Y \sim Poisson(\lambda_2)$, niin $X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Lisätehtäviä kaksiulotteiseen jakaumaan liittyen, tehtävät liittyvät luennolla jaettuun monisteeseen, jonka lähteina ovat pääosin olleet Ilkka Mellinin luennot ja Tuomisen Todennäköisyyslaskenta I. Näistä tehtävistä saa ylimääräisiä demopisteitä.

1. Määritä vakio $c$ siten, että $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on yhteisjakauman tiheysfunktio, kun $f = c\,(x + y)$ ja $0 < x < 1$ ja $0 < y < 1$.

2. Laske $\mathbf{P}\left\{X < \frac{1}{2} \text{ ja } Y > \frac{1}{4}\right\}$, kun satunnaismuuttujaparin $(X, Y)$ yhteisjakauman tiheysfunktio on lisätehtävän 1 $f$.

3. Määrää reunatiheysfunktiot $f_X$ ja $f_Y$, kun satunnaismuuttujaparin $(X, Y)$ yhteisjakauman tiheysfunktio on lisätehtävän 1 $f$.

4. Tutki ovatko$X$ ja $Y$ riippumattomia, kun satunnaismuuttujaparin $(X, Y)$ yhteisjakauman tiheysfunktio on lisätehtävän 1 $f$.

5. Laske korrelaatiokerroin $corr\,(X, Y)$, kun satunnaismuuttujaparin $(X, Y)$ yhteisjakauman tiheysfunktio on lisätehtävän 1 $f$.