

## Todennäköisyyslaskenta kevät 2002, harjoitus 5

1. Todista Lause 2.8.2: Olkoon  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  todennäköisyysavaruus ja  $B \in \mathcal{F}$  siten, että  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Tällöin  $\mathbf{P}(\cdot | B)$  on todennäköisyys, eli toteuttaa ominaisuudet (TN1), (TN2) ja (TN3).
2. Laatikossa, jossa on 3 valkoista ja 4 mustaa palloa, nostetaan umpimähkään 3 palloa. Laske tapahtuman  $A =$ ”saadaan korkeintaan yksi valkoinen pallo” todennäköisyys, kun pallot nostetaan
  - (a) ilman takaisinpanoa,
  - (b) takaisinpanolla.
3.  $n$  palloa sijoitetaan umpimähkään  $k$  lokeroon. Millä todennäköisyydellä lokerossa on tasan  $i$  palloa ( $i = 0, 1, \dots, n$ )?
4. Laatikossa on 6 punaista ja 9 valkoista palloa. Kokeessa laatikosta nostetaan 3 palloa ilman takaisinpanoa. Laske todennäköisyydet
  - (a) kaikki ovat punaisia ehdolla, että ainakin yksi on punainen,
  - (b) kaikki ovat punaisia ehdolla, että pallot ovat samanvärisiä?
5. Osoita: Jos  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}$ , niin  $\mathbf{P}(A | B) \geq \frac{1}{2}$ .
6. Todennäköisyyslaskennan kurssilla on 45 opiskelijaa. Harjoitusryhmiä on neljä. Mikä on todennäköisyys sille, että harjoitusryhmässä 1 on 12 henkilöä, harjoitusryhmässä 2 on 11 henkilöä, harjoitusryhmässä 3 on 11 henkilöä ja harjoitusryhmässä 4 on 11 henkilöä?
7. Oletetaan, että kissan väri määräytyy yhdestä geeniparista. Tiedetään, että emokissa on värinsä suhteen tyyppiä  $aa$ . Kolli, joka on pentueen isä, on tyyppiä  $AA$  todennäköisyydellä  $p$  tai tyyppiä  $Aa$  todennäköisyydellä  $1 - p$ . Pennut saavat omaan geenipariinsa yhden geenin molemmilta vanhemmilta. (Eli jos isä  $AA$ , niin pentu  $Aa$  ja jos isä  $Aa$ , niin pentu on tyyppiä  $aa$  tai  $Aa$  yhtä suurella todennäköisyydellä). Jos pentueeseen syntyy kolme kissanpentua, jotka ovat tyyppiä  $Aa$ , niin mikä on todennäköisyys, että isä on tyyppiä  $AA$ ? (Siis: Laske todennäköisyys, että isä on tyyppiä  $AA$ , ehdolla että pennut ovat tyyppiä  $Aa$ .)