

Todennäköisyyslaskenta

11. harjoitus 2004

1. Valitaan satunnaisluku X väliltä $]0, 1[$ ja oletetaan, että $X \sim \text{Tas}(0, 1)$. Laske todennäköisyys, että
 - a) luvun \sqrt{X} ensimmäinen desimaali on 3,
 - b) luvun X^2 ensimmäinen desimaali on 3.
2. Oletetaan, että $X \sim \text{Tas}(0, 1)$. Johda satunnaismuuttujan $-\ln X$ kertymä- ja tiheysfunktio.
3. Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Johda tiheysfunktiot satunnaismuuttujille a) $2X + 1$, b) $2X^2 + 1$ ja c) $|X|^{\frac{1}{2}}$.
4. Tarkastellaan xy -tason pisteestä $(0, 1)$ lähtevää valonsädettä, joka muodostaa negatiivisen y -akselin suunnan kanssa kulman θ . Oletetaan, että $\theta \sim \text{Tas}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Olkoon X sen pisteen x -koordinaatti, jossa valonsäde leikkaa x -akselin. Johda X :n tiheysfunktio ja kertymäfunktio. (Vastaus: tiheysfunktio on $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.)
5. Satunnaismuuttujalla X on jatkuva aidosti kasvava kertymäfunktio $F : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$. Osoita, että satunnaismuuttuja $Y = F(X)$ noudattaa $\text{Tas}(0, 1)$ -jakaumaa.
6. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia odotusarvoina μ_1 ja μ_2 sekä variansseina σ_1^2 ja σ_2^2 . Lausu näiden avulla
 - a) $E(aX + bY)$,
 - b) $\text{Var}(aX + bY)$,
 - c) $E(X^2Y)$,
 - d) $E((X + Y)(X - Y))$,
 - e) $E((X - 2Y)^2)$.
7. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, 2$. Olkoot $Y = X_1 + X_2$ ja $Z = X_1 - X_2$. Laske $\text{corr}(X_1, Y)$, $\text{corr}(X_2, Z)$ ja $\text{corr}(Y, Z)$.