

Todennäköisyyslaskenta

14. harjoitus 2004

1. Olkoon $P(A) = p$. Muodosta tapahtuman A indikaattorin 1_A todennäköisyyden generoiva funktio ja johda tämän avulla $\text{Bin}(n, p)$ -jakauman todennäköisyyden generoiva funktio.
2. Laske $\text{Bin}(n, p)$ -jakauman odotusarvo ja varianssi todennäköisyyden generoivan funktion avulla.
3. Olkoon G satunnaismuuttujan X todennäköisyyden generoiva funktio. Lausu G :n avulla todennäköisyys, että X saa parillisen arvon.
4. Riippumattomat satunnaismuuttujat X ja Y saavat arvot 1,2,3 kunkin todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$. a) Määritä X :n todennäköisyyden generoiva funktio ja momentit generoiva funktio. b) Määritä summan $X + Y$ pistetodennäköisyydet käyttämällä todennäköisyyden generoivia funktioita.
5. Olkoon $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$. Osoita, että $E(X) = \frac{r}{\lambda}$.
6. Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Laske momentit $E(X^n)$, kun $n = 1, 2, 3, \dots$
7. Olkoot X ja Y riippumattomia $\text{Tas}(0, 1)$ -jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Johda tulon $Z = XY$ tiheysfunktio.
8. Parin (X, Y) tiheysfunktio on

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right),$$

kun $0 < x < 1$, $0 < y < 2$ ja $f(x, y) = 0$ muulloin.

a) Laske $P\{X > Y\}$.

b) Laske $P\{Y > \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2}\}$.