

Todennäköisyyslaskenta

8. harjoitus 2004

1. Eräässä väestössä miespuolisen henkilön pituus on satunnaismuuttuja X , joka noudattaa normaalijakaumaa parametrein $\mu = 178$ ja $\sigma^2 = 25$ (yksikkönä cm). Määritä
 - a) $P\{168 \leq X \leq 188\}$,
 - b) $P\{X \geq 188\}$,
 - c) $P\{X < 193 \mid X > 188\}$.
2. Olkoon $X \sim N(0, 1)$. Osoita, että myös satunnaismuuttuja $-X$ noudattaa standardinormaalijakaumaa. (Ohje: Muodosta $(-X)$:n kertymäfunktio.)
3. Olkoon $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ja olkoon $a > 0$. Lausu satunnaismuuttujan $Y = aX + b$ kertymäfunktio standardinormaalijakauman kertymäfunktion avulla. Mitä jakaumaa Y noudattaa?
4. Asiakkaalta pankissa kuluva aika minuuteissa laskettuna on jakaumaltaan $\text{Exp}(\frac{1}{10})$.
 - a) Millä todennäköisyydellä asiakas viipyy pankissa yli 15 minuuttia?
 - b) Millä todennäköisyydellä 10 minuuttia pankissa ollut asiakas viipyy vielä yli 15 minuuttia?
5. Tienmutkaan aikavälillä $]0, t[$ saapuvien autojen lukumäärä X_t on satunnaismuuttuja, jonka jakauma on $\text{Poisson}(\lambda t)$ kaikilla $t > 0$. Kullakin autolla on toisista riippumatta todennäköisyys p ajaa ulos mutkasta.
 - a) Laske todennäköisyys, että aikavälillä $]0, t[$ ei satu yhtään ulosajoa.
 - b) Olkoon T satunnaismuuttuja, joka ilmoittaa sen ajanhetken, jona ensimmäinen ulosajo tapahtuu. Johda T :n kertymäfunktio, tiheysfunktio ja laske odotusarvo $E(T)$.
6. Laske $E(X)$, kun X on jatkuva satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Elektronisen komponentin käyttöikä tunneissa on satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on $f(x) = a^2 x e^{-ax}$, $x > 0$,
jollakin $a > 0$. Laske käyttöiän odotusarvo.
8. Laske satunnaismuuttujan $Y = \sin X$ odotusarvo, kun $X \sim \text{Tas}(0, \pi)$.
9. Olkoon X positiivinen jatkuva satunnaismuuttuja. Osoita, että

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx,$$

missä F on X :n kertymäfunktio. (Ohje: Lemma 4.6.3.)